

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys I 2014

Uppgifter för vecka 45

Uppgifter för början av veckan O1, O2; K1, K2 och K3

O1 Utred med hjälp av kursens satser

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 1}.$$

O2 Visa utgående från definitionen att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{x - 7} = \infty$$

och

$$\lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{x^2 - 3}{x - 7} = \infty.$$

K1 Utred med hjälp av kursens satser

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}.$$

K2 Visa utgående från definitionen att

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x + 7} = \frac{1}{4}.$$

K3 Visa utgående från definitionen att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = \infty.$$

Uppgifter för slutet av veckan O3, O4; K4, K5 och K6

O3 Existerar gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x?$$

I uppgiften får man använda sig av allt man sedan tidigare vet om cosinusfunktionen. Lösningen blir lättare om du formulerar och bevisar något lämpligt hjälpresultat.

O4 Anta att funktionen $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ är växande. Vad kan vi säga om funktionen f 's beteende i närheten av punkten $x = 0$ om vi dessutom vet att f inte är kontinuerlig i punkten $x = 0$?

K4 Visa utgående från definitionen att

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2}{x - 2} = \infty.$$

K5 Anta att funktionen $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ är växande och att $a < c < b$. Visa att

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x).$$

K6 Anta att funktionen $f: (1, 7) \rightarrow \mathbb{R}$ är deriverbar i punkten $x = 2$. Anta vidare att $f(2) = 3$ och $f'(2) = 4$. Visa att det existerar ett sådant $h > 0$ att för alla $x \in (2, 2 + h)$ gäller

$$3 + \left(4 - \frac{1}{100}\right)(x - 2) < f(x) < 3 + \left(4 + \frac{1}{100}\right)(x - 2).$$

(Rita bild!) I uppgiften lönar det sig att tillämpa definitionen för funktionens gränsvärde på gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = 4.$$