

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys I 2014

Uppgifter för vecka 41

Uppgifter för början av veckan O1, O2; K1, K2 och K3

O1 Anta att (x_n) är en talföljd för vilken gäller att $x_n \rightarrow a$ då $n \rightarrow \infty$.

Visa direkt utgående från definitionen att (a) $x_{n+1} \rightarrow a$ då $n \rightarrow \infty$,

(b) $x_{n^2} \rightarrow a$ då $n \rightarrow \infty$, och

(c) $x_{n-1} \rightarrow a$ då $n \rightarrow \infty$.

Finns det en sats i boken ur vilken (b) följer? Vad betyder egentligen (c) då x_{1-1} inte betyder någonting?

O2 Anta att (x_n) är en talföljd för vilken gäller att $x_n \rightarrow a$ då $n \rightarrow \infty$.

Anta att $x_n \geq 0$ för alla $n = 1, 2, \dots$. Visa att

$$\sqrt{x_n} \rightarrow \sqrt{a}$$

då $n \rightarrow \infty$.

K1 Visa utgående från definitionen att

$$\frac{n^2 + n}{n + 1} \rightarrow \infty$$

då $n \rightarrow \infty$.

K2 Visa utgående från definitionen att

$$\frac{n^2 + 1}{n + 1} \rightarrow \infty$$

då $n \rightarrow \infty$.

K3 Visa utgående från definitionen att

$$\frac{3 - n^2}{n + 1} \rightarrow -\infty$$

då $n \rightarrow \infty$.

Uppgifter för slutet av veckan O3, O4; K4, K5 och K6

O3 Visa att villkoren

(i) $x_n \rightarrow \infty$ då $n \rightarrow \infty$, och

(ii) $-x_n \rightarrow -\infty$ då $n \rightarrow \infty$

är ekvivalenta.

O4 Anta att $a > 1$. Visa med hjälp av Bernoullis olikhet att $a^n \rightarrow \infty$ då $n \rightarrow \infty$.

K4 Bestäm utgående från definitionen för talet e gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n}.$$

Observera att resultatet från uppgift O2 kan vara till hjälp.

K5 Anta att $x_n \rightarrow \infty$ och $y_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$ då $n \rightarrow \infty$. Visa att $x_n + y_n \rightarrow \infty$ då $n \rightarrow \infty$.

K6 Anta att $x_n \rightarrow \infty$ och $y_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$ då $n \rightarrow \infty$. Anta vidare att $a > 0$. Visa att $x_n y_n \rightarrow \infty$ då $n \rightarrow \infty$. (Tilläggsfråga för de intresserade: Kan man säga något allmänt om produktens $x_n y_n$ gränsvärde om $a = 0$?)