INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys I 2014
Uppgifter för vecka 40

Uppgifter för början av veckan O1, O2; K1, K2 och K3

O1 Anta att (x_n) är en talföljd för vilken gäller att $|x_n| \to 0$ då $n \to \infty$. Visa att $x_n \to 0$.

O2 Definitionen för talföljdens gränsvärde kan med kvantorer kort skrivas på formen

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N}_1 \forall n > K\colon |x_n - a| < \varepsilon.$$

Vad berättar följande teckenrader om talföljden (x_n):
(a) $\forall \varepsilon > 0 \forall K \in \mathbb{N}_1 \forall n > K\colon |x_n - a| < \varepsilon$;
(b) $\exists K \in \mathbb{N}_1 \forall \varepsilon > 0 \forall n > K\colon |x_n - a| < \varepsilon$.

K1 Visa utgående från definitionen att

$$\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+2} \to 1$$

då $n \to \infty$.

K2 Utred gränsvärdet nedan med hjälp av kursens kunskaper om talföljdens gränsvärde.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+1}{2n^2+5n+1}.$$

K3 Utred gränsvärdet nedan med hjälp av kursens kunskaper om talföljdens gränsvärde.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+1}{2n^3+5n+1}.$$

Uppgifter för slutet av veckan O3, O4; K4, K5 och K6

O3 Anta att talföljderna (x_n) och (y_n) uppfyller följande villkor:
(i) $y_n \to a$ då $n \to \infty$,

(ii) (x_n) är växande och
(iii) $x_n \leq y_n$ för alla n.
Visa att
(iv) $x_n \leq a+1$ för alla n, och
(v) följden (x_n) konvergerar.

O4 Anta att $x_n \to a$ då $n \to \infty$ och $a \neq 0$. Visa att det existerar ett sådant $K \in \mathbb{N}_1$ att för alla $n > K$ gäller

$$|x_n| > \frac{1}{2}|a|.$$

En möjlighet är att skilt undersöka fallen $a > 0$ och $a < 0$.

K4 Visa med hjälp av Bernoullis olikhet att

$$\frac{1}{2^n} \to 0$$

då $n \to \infty$.

K5 Anta att följden (x_n) konvergerar. Visa att

$$\frac{(x_n)^7}{n} \to 0$$

då $n \to \infty$.

K6 Vi undersöker följande rekursivt definierade talföljd: $x_1 = 3$ och då $n = 1, 2, 3, \dots$ gäller

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{7}{x_n}).$$

Visa att följden (x_n) konvergerar och att dess gränsvärde är $\sqrt{7}$.