INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys I 2014
Uppgifter för vecka 39

Uppgifter för början av veckan O1, O2; K1, K2 och K3

O1 Visa direkt utgående från definitionen för talföljdens gränsvärde att påståendet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 2$$

är falskt. (Man får alltså inte använda sig av resultatet från uppgift K1!)

O2 Vi antar att a är supremum av mängden

$$A = \{x > 0 \mid x^2 < 3\}$$

Visa att $a^2 = 3$ (Alltså $a = \sqrt{3}$). Hur vet vi annars att A har ett supremum?

K1 Visa direkt utgående från definitionen för talföljdens gränsvärde att påståendet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$$

stämmer.

K2 Visa direkt utgående från definitionen för talföljdens gränsvärde att påståendet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 0$$

stämmer.

K3 Visa direkt utgående från definitionen för talföljdens gränsvärde att påståendet

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+7} - \sqrt{n+3}) = 0$$

stämmer. Det lönar sig att förlänga differensen med uttrycket $\sqrt{n+7} + \sqrt{n+3}$.

Uppgifter för slutet av veckan O3, O4; K4, K5 och K6

O3 Vi undersöker talföljderna (x_n) och (y_n). Anta att
(a) $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, och
(b) för alla $n \in \mathbb{N}_1$ gäller att $|y_n| \leq 7$.
Vi betecknar $z_n = x_n y_n$. Visa att följden (z_n) konvergerar.

O4 Vi undersöker talföljderna (x_n) och (y_n).
(a) Anta att följderna (x_n) och (y_n) divergerar. Divergerar då alltid även följden $(x_n + y_n)$?
(b) Anta att följderna (x_n) och (y_n) divergerar. Divergerar då alltid även följden $(x_n y_n)$?
(c) Anta att följden (x_n) konvergerar och följden (y_n) divergerar. Divergerar då nödvändigtvis följden $(x_n + y_n)$?
(d) Anta att följden (x_n) konvergerar och följden (y_n) divergerar. Divergerar då nödvändigtvis följden $(x_n y_n)$?
(e) Anta att följden (x_n) konvergerar och följden (y_n) divergerar. Anta vidare att $x_n \neq 0$. Divergerar nu nödvändigtvis följden $(x_n y_n)$?

K4 Visa direkt utgående från definitionen för talföljdens gränsvärde att påståendet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + n - 1} = 1$$

stämmer.

K5 Visa direkt utgående från defintionen för talföljdens gränsvärde att påståendet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + n - 1} = 2$$

är falskt.

K6 En talföljds delföljd definieras i kursboken på sidan 48. Betrakta talföljden (x_n), där för alla n gäller

$$x_n = (-1)^{n+1}.$$

Ge exempel på två konvergerande delföljder till följden med olika stora gränsvärden.