INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys I 2014
Uppgifter för vecka 38

Uppgifter för början av veckan O1, O2; K1, K2 och K3

O1 Bestäm med hjälp av absolutbeloppslemman vilka reella tal x som satisfierar olikheten $|x-2| < 1$. (Detta har att göra med lemman på formen: Om $a > 0$ så gäller för alla reella tal t att: $|t| < a$ om och endast om $-a < t < a$.)

O2 Ge $x^2 - 4$ som en produkt och visa med hjälp av denna att olikheten $|x^2 - 4| \leq 5|x-2|$ alltid gäller då $|x-2| < 1$. Gäller $|x^2 - 4| < 5|x-2|$ alltid då $|x-2| < 1$?

K1 Anta att det reella talet x uppfyller villkoret $0 < x < 3$ och villkoret $1 < x < 4$. Visa att därmed gäller $|x-2| < 1$.

K2 Visa med hjälp av absolutbeloppets definition att för alla x gäller $|x| \geq 0$.

K3 Visa utgående från absolutbeloppets definition att för alla reella tal x och $y \neq 0$ gäller

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Det lönar sig att dela upp beviset i fall, utgående från vilken sorts tal man betraktar. Extra fråga (krävs inte för att uppgiften ska anses vara löst): Hur förändras resonemanget om man undersöker produkten i stället för kvoten?

Uppgifter för slutet av veckan O3, O4; K4, K5 och K6

O3 Återvänd till resultatet från uppgift O2. Vi antar att $|x-2| < 5^{-7777}$. Vad kan vi säga om avståndet $|x^2 - 4|$?

O4 Vad är Bernoullis olikhet? Hur bevisas den? Undersök sidan 25 i boken.

K4 (a) Beräkna differensen

$$\frac{2n-1}{3n+1} - \frac{2}{3}.$$

(b) Visa genom att uppskatta uppåt att absolutbeloppet av olikheten ovan är mindre eller lika med $\frac{2}{n}$.

K5 Anta att $n > 2^{33333}$. Vad kan du säga om avståndet

$$\left|\frac{2n-1}{3n+1} - \frac{2}{3}\right|$$

utgående från föregående uppgifts (b)-del?

K6 I boken definieras supremum och infimum på sidorna 18 - 22. Bestäm supremum och infimum för det halvöppna intervallet $[3, 7)$. Motivera ditt svar, men ännu den här gången krävs inget exakt bevis.