INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys I 2014
Uppgifter för vecka 37

Uppgifter för början av veckan O1, O2; K1, K2 och K3

O1 Inversen till talet x är ett sådant entydigt tal y att $xy = 1$. Varför har inte talet 0 en invers? Med andra ord: varför får man inte dividera med 0?

O2 Sök ett positivt bråktal $\frac{a}{b}$ sådant att olikheten

$$\frac{n^2 + 2n}{2n^2 + n} \leq \frac{a}{b}.$$

gäller för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$ (Här är a och b heltal.) Låt täljaren växa och nämnaren krympa. Motivera!

K1 Sök ett positivt reellt tal K så att för alla x gäller: Om $1 < x < 2$ så $x^2 - 1 < K(x - 1)$.

K2 Sök ett positivt reellt tal h som är så litet att för alla x gäller: Om $1 < x < 1 + h$ så $1 < x^2 < 1 + 3^{-10000}$. Det lönar sig att använda resultatet från föregående uppgift.

K3 Vi vet att $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Sök med hjälp av detta efter ett positivt reellt tal K sådant att för alla x gäller: Om $1 < x < 2$ så $x^3 - 1 < K(x - 1)$.

Uppgifter för slutet av veckan O3, O4; K4, K5 och K6

O3 (a) Anta att $0 < x < y$. Visa att $x^2 < y^2$.
(b) Anta att $1 < x$. Gäller det då att $x^2 < x^5$?
Motivering!

O4 I kursboken på sidan 21 bevisas att $\sqrt{2}$ är ett irrationellt tal. (För en del kan beviset vara bekant från skolan.) Forma om beviset och visa att $\sqrt[3]{5}$ är ett irrationellt tal.

K4 Sök ett positivt bråktal $\frac{a}{b}$ sådant att olikheten

$$\frac{n^2+2n}{2n^2+n} \geq \frac{a}{b}.$$

gäller för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$ (Här är a och b heltal.) Låt täljaren krympa och nämnaren växa. Motivera!

Extra fråga: Vad får du veta genom att kombinera resultaten från O2 och K4?

K5 Vi tillämpar resultatet från uppgift K3. Sök ett sådant positivt reellt tal att för alla x gäller: Om $1 < x < 1 + h$ så $1 < x^3 < 1 + 7^{-10000}$.

K6 Det verkar som om talen

$$\frac{n+1}{2n+3},$$

där $n = 1, 2, 3, \ldots$, är nära talet $\frac{1}{2}$ då n är stort. I den här uppgiften försöker vi specificera detta intryck.

(a) Visa att för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$ gäller

$$0 < \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2n+3} < \frac{1}{n}.$$

(Beräkna differensen och låt resultatets nämnare krympa.)

(b) Anta att $n > 10^{10000}$. Visa att

$$0 < \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2n+3} < 10^{-10000}.$$