Äärimmäisten ilmiöiden teoriaa, laskuharjoitus 5, 1.12.2014

Kaikissa tehtävissä $X, X_1, X_2, \ldots$ ovat riippumattomia F-jakautuneita ei-negatiivisia satunnaismuuttujia, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ ja $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Lisäksi $\mu \in (0, \infty)$ on X:n odotusarvo. Oletetaan, että $\overline{F} \in R_{-\alpha}$, missä $\alpha > 1$.

1. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ kiinteä ja $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Merkitään

$$A_x(\varepsilon) = \{X_i > (1 - \varepsilon)x \text{ jollain } i \leq n\}$$

ja

$$B_x(\varepsilon) = \{X_i > \varepsilon x \text{ tasan yhdellä indeksillä } i \leq n\}.$$

Osoita, että

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\mathbb{P}(\{S_n > x\} \cap A_x(\varepsilon)^c)}{\mathbb{P}(S_n > x)} = 0.$$

2. (jatkoa) Osoita, että

$$\lim_{x \to \infty} \mathbb{P}(A_x(\varepsilon) \cap B_x(\varepsilon) \,|\, S_n > x) = 1.$$

3. Olkoon $a > \mu$ kiinteä. Osoita, että $\forall x > 0$, on olemassa raja-arvo

$$\overline{G}(x) \doteq \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(S_n > n(a + x) \,|\, S_n > na).$$

Osoita lisäksi, että $\overline{G} \in R_{-\alpha}$.

4. Olkoon $x > 1$ kiinteä. Osoita, että

$$\liminf_{n \to \infty} (\log n)^{-1} \log \mathbb{P}(S_n > n^x) \geq 1 - \alpha x.$$

5. Olkoon $a > \mu$ ja $b \in (0, a - \mu)$. Osoita, että

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(M_n > nb \,|\, S_n > na) = 1.$$