

Äärimmäisten ilmiöiden teoriaa, laskuharjoitus 4, 10.11.2014

1. Olkoot X ja Y riippumattomia ei-negatiivisia satunnaismuuttujia. Osoita, että

a) $X + Y$ on paksuhäntäinen, jos joko X tai Y on paksuhäntäinen,

b) $X + Y$ on kevythäntäinen, jos sekä X että Y ovat kevythäntäisiä.

2. Olkoot Y_1 ja Y_2 riippumattomia ei-negatiivisia satunnaismuuttujia ja F_i muuttujan Y_i kertymäfunktio, $i = 1, 2$. Oletetaan, että $\bar{F}_i \in R_{-\alpha_i}$, $i = 1, 2$, missä $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$. Osoita, että

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(Y_1 + Y_2 > x)}{\mathbb{P}(Y_2 > x)} = 1.$$

3. Olkoot X ja Y riippumattomia eksponenttijakautuneita satunnaismuuttujia parametrimilla $\mu > 0$,

$$\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(Y > x) = e^{-\mu x}, \quad x \geq 0.$$

Osoita, että XY on paksuhäntäinen.

4. Olkoon X mielivaltainen ei-negatiivinen satunnaismuuttuja ja F X :n kertymäfunktio. Merkitään

$$\bar{s} = \sup\{s \geq 0 \mid \mathbb{E}(X^s) < \infty\} \in [0, \infty].$$

Olkoon

$$\bar{u} = - \limsup_{x \rightarrow \infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(X > x),$$

missä sovitaan, että $\bar{u} = +\infty$, jos $\mathbb{P}(X > x) = 0$ jollain $x \geq 0$. Oletetaan tunnetuksi, että $\bar{u} = \bar{s}$.

Oletetaan, että \bar{F} on säännöllisesti vaihteleva indeksillä $-\alpha$, missä $\alpha > 0$. Olkoot X_1 ja X_2 riippumattomia ja samoin jakautuneita kuin X . Osoita, että

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(X_1 X_2 > x) = -\alpha.$$

5. Olkoot ξ_1, ξ_2 ja ξ_3 riippumattomia ja samoin jakautuneita ei-negatiivisia satunnaismuuttujia. Olkoon yhteinen kertymäfunktio F . Oletetaan, että $\bar{F} \in R_{-\alpha}$, missä $\alpha \geq 0$. Määrää todennäköisyyden

$$\mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 > x, \xi_2 + \xi_3 > x)$$

asymptoottinen muoto, kun $x \rightarrow \infty$.