Äärimmäisten ilmiöiden teoriaa, laskuharjoitus 2, 29.9.2014

1. Olkoot $X_1, X_2, \ldots$ riippumattomia eksponenttijakautuneita satunnaismuuttujia odotusarvona $\mu = 1$ ja $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Määrää sellaiset x_1 ja x_2, että

$$\mathbb{P}(M_n \in (x_1, x_2)) = 0.9 \text{ ja } \mathbb{P}(M_n \le x_1) = \mathbb{P}(M_n \ge x_2),$$

kun $n = 10, 100, 1000$.

2. (jatkoa) Perustele lauseen 2.3 avulla approksimaatiota

$$\mathbb{P}(M_n \le x + \log n) \sim e^{-e^{-x}}, \quad n \to \infty.$$

Määrää tämän avulla sellaiset x_1 ja x_2, että edellisen tehtävän vaatimukset toteutuvat likimäärin.

3. Olkoon F kertymäfunktio ja

$$x_F = \sup\{x \in \mathbb{R} | F(x) < 1\} \in (-\infty, \infty].$$

Oletetaan, että $x_F < \infty$ ja että F kuuluu jakauman H vaikutuspiiriin maksimin suhteen. Olkoon G sellainen kertymäfunktio, että

$$\lim_{x \to x_F -} \overline{G}(x)/\overline{F}(x) = 1.$$

Osoita, että myös G kuuluu jakauman H vaikutuspiiriin maksimin suhteen.

4. Olkoon $\alpha > 0$ vakio ja

$$G(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^\alpha}, \text{ jos } x \le 0 \\ 1, \text{ jos } x > 0 \end{cases}$$

(Weibull-jakauma). Osoita, että G on maksimin suhteen stabiili.

5. Olkoon F kertymäfunktio ja x_F kuten tehtävässä 3. Oletetaan, että $x_F < \infty$ ja että $\lim_{x \to x_F -} F(x) < 1$. Olkoon (u_n) sellainen reaalilukujono, että raja-arvo

$$\lim_{n \to \infty} n\overline{F}(u_n)$$

on olemassa. Osoita, että kyseinen raja-arvo on joko 0 tai ∞. Päättele, että F ei kuulu minkään jakauman vaikutuspiiriin maksimin suhteen.