Äärimmäisten ilmiöiden teoriaa, laskuharjoitus 1, 15.9.2014

1. Funktiota $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ sanotaan *hitaasti vaihtelevaksi*, jos kaikilla $x > 0$

$$\lim_{t\to\infty} f(tx)/f(t) = 1$$

ja *säännöllisesti vaihtelevaksi indeksillä* $\alpha \in (-\infty, \infty)$, jos kaikilla $x > 0$

$$\lim_{t\to\infty} f(tx)/f(t) = x^{\alpha}.$$

Osoita, että

$$f(x) = \log(x + 1)$$

määrittelee hitaasti vaihtelevan funktion ja että f,

$$f(x) = \sin x + 2$$

ei ole säännöllisesti vaihteleva millään indeksillä.

2. Olkoon F kertymäfunktio ja $\overline{F}$ säännöllisesti vaihteleva indeksillä α. Osoita, että $\alpha \leq 0$. Esitä esimerkki kertymäfunktiosta, jonka häntä $\overline{F}$ on hitaasti vaihteleva.

3. Olkoon $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaikkialla derivoituva ja $\lim_{x\to\infty} g'(x) = 0$. Osoita, että

$$f(x) = e^{g(\log x)}, \quad x > 0,$$

määrittelee hitaasti vaihtelevan funktion.

4. (jatkoa) Olkoon

$$f(x) = e^{(\log x)^{1/3}\cos((\log x)^{1/3})}, \quad x > 0.$$

Osoita, että f on hitaasti vaihteleva ja että, $\forall x_0 > 0$, $\inf_{x\geq x_0} f(x) = 0$ ja $\sup_{x\geq x_0} f(x) = +\infty$.

5. Olkoot F ja G ei-degeneroituneita kertymäfunktioita sekä $a_1, a_2, \ldots$ positiivisia ja $b_1, b_2, \ldots$ mielivaltaisia reaalilukuja. Oletetaan, että $F^n(a_n x + b_n) \xrightarrow{d} G(x)$, kun $n \to \infty$. Osoita, että $a_n/a_{n+1} \to 1$, kun $n \to \infty$.