3. Suurten poikkeamien syntymekanismeista

Olkoot F, X, X_1, X_2, ... ja M_1, M_2, ... kuten kohdan 2 alussa. Oletetaan siis, että X, X_1, X_2, ... ovat i.i.d.
Oletetaan lisäksi koko luvussa 3, että $X \geq 0$ m.v.
Merkitään $\mu = \mathbb{E}(X)$ ja

$$S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Suurten lukujen lain nojalla

$$(3.1) \qquad \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu \right) = 1,$$

ja, $\forall \varepsilon > 0$,

$$(3.2) \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| \leq \varepsilon \right) = 1$$

Kaava (3.1) on vahva ja kaava (3.2) heikko suurten lukujen laki.

Suurten poikkeamien teoriassa ollaan kiinnostuneita tyyppiä

$$(3.3) \qquad \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > a \right), \quad (a \text{ kiinteä}, \ a > \mu),$$

olevista todennäköisyyksistä. Suurten lukujen lain nojalla todennäköisyys (3.3) suppenee kohti nollaa, kun $n \to \infty$. Kiinnostavaa on kuitenkin tutkia, mitä suuruusluokkaa todennäköisyys on, kun n on suuri. Tämän tyyppiset todennäköisyydet ovat kiinnostavia monissa sovelluksissa, esimerkiksi riskiteoriassa.

Todennäköisyyden (3.3) suuruus tulee riippumaan oleellisesti X:in jakauman hännästä $\bar{F}(x)$ suurilla x:in arvoilla. Kutsutaan X:ää <u>kevythäntäiseksi</u> jos

$$(3.4) \quad \mathbb{E}(e^{sX}) < \infty, \quad \text{jollain } s > 0.$$

Muussa tapauksessa X:ää kutsutaan <u>paksuhäntäiseksi</u>. Seuraavassa tarkastellaan paksuhäntäisistä jakaumista vain sellaisia, joissa

$$\bar{F} \in R_{-\alpha}, \quad \text{jollain } \alpha > 1.$$

Jos $\bar{F} \in R_{-\alpha}$, niin X on automaattisesti paksuhäntäinen. Tämä nähdään seuraavasta lemmasta.

<u>Lemma 3.1.</u> Jos $L \in R_0$ on mitallinen, niin annetulle $\varepsilon > 0$ voidaan määrätä sellainen x_ε, että

$$(3.5) \quad x^{-\varepsilon} \leq L(x) \leq x^{\varepsilon}, \quad \forall\ x > x_\varepsilon.$$

Jos $\bar{F} \in R_{-\alpha}$, niin

$$(3.6) \quad \mathbb{E}(X^\beta) < \infty, \quad \forall\ \beta < \alpha,$$

ja

$$(3.7) \quad \mathbb{E}(X^\beta) = \infty, \quad \forall\ \beta > \alpha.$$

<u>Todistus</u>. Arvio (3.5) on todistettu liitteessä L1 (seuraus L4). Odotusarvoja koskevat tulokset seuraavat tästä. $\square$

Kevythäntäisillä jakaumilla $\mathbb{E}(X^\beta) < \infty$ kaikilla $\beta > 0$.

Tarkastellaan johdannoksi raja-arvoja

$$(3.8) \quad \mathbb{P}(S_n > x), \quad n \text{ kiinteä}, \quad x \to \infty.$$

Erot kevyt- ja paksuhäntäisten jakaumien välillä ovat tässäkin rajankäynnissä merkittäviä.

<u>Lause 3.2.</u> Jos $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$, $\alpha > 0$, niin kiinteällä $n \in \mathbb{N}$,

$$(3.9) \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\mathbb{P}(S_n > x)}{n \bar{F}(x)} = 1.$$

Jos X on kevythäntäinen ja $\bar{F}(x) > 0$, $\forall x > 0$, niin

$$(3.10) \quad \limsup_{x \to \infty} \frac{\mathbb{P}(S_2 > x)}{2\bar{F}(x)} > 1.$$

Yllättävää Lauseessa 3.2 on tulos (3.9). On nimittäin helppo nähdä, että

$$(3.11) \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\mathbb{P}(M_n > x)}{n \bar{F}(x)} = 1,$$

missä $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Näin ollen

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\mathbb{P}(S_n > x)}{\mathbb{P}(M_n > x)} = 1.$$

Asymptoottisessa mielessä summa S_n on samaa kertalukua kuin (ei-negatiivisten) summattaviensa maksimi.

Lauseen 3.2 todistus. Olkoot $Y_i \geq 0$ ja F_i Y_i:n kertymäfunktio, $i = 1,2$. Oletetaan, että Y_1 ja Y_2 ovat riippumattomia ja että

$$\bar{F}_i(x) = x^{-\alpha} L_i(x),$$

missä $L_i \in R_0$, $i = 1,2$. Siis $\bar{F}_i \in R_{-\alpha}$, $i = 1,2$. Olkoon G summan $Y_1 + Y_2$ kertymäfunktio. Osoitetaan, että $\bar{G} \in R_{-\alpha}$.

Koska

$$\mathbb{P}(Y_1 + Y_2 > x) \geq \mathbb{P}(\max(Y_1, Y_2) > x)$$

$$= 1 - F_1(x) F_2(x) = 1 - (1 - \bar{F}_1(x))(1 - \bar{F}_2(x))$$

$$= \bar{F}_1(x) + \bar{F}_2(x) - \bar{F}_1(x) \bar{F}_2(x)$$

ja

$$(3.12) \quad \frac{\bar{F}_1(x)\bar{F}_2(x)}{\bar{F}_1(x) + \bar{F}_2(x)} \leq \frac{\bar{F}_1(x)\bar{F}_2(x)}{\bar{F}_1(x)} = o(1),$$

niin

$$(3.13) \quad \bar{G}(x) \geq (1 + o(1))(\bar{F}_1(x) + \bar{F}_2(x)).$$

Olkoon $a>0$ mielivaltainen. Tällöin

$$\bar{F}_i(ax) = (ax)^{-\alpha} L_i(ax)$$

$$\overset{(3.14)}{=} a^{-\alpha} x^{-\alpha} \frac{L_i(ax)}{L_i(x)} L_i(x) = (1+o(1))\, a^{-\alpha} \bar{F}_i(x).$$

Olkoon nyt $a \in (0, \tfrac{1}{2})$. Tällöin

$$\{Y_1+Y_2>x\} \subseteq \{Y_1>(1-a)x\} \cup \{Y_2>(1-a)x\} \cup \{Y_1>ax,\, Y_2>ax\}.$$

Saadaan kuten (3.12):sta käyttäen (3.14):ää, että

$$\bar{G}(x) \le \bar{F}_1((1-a)x) + \bar{F}_2((1-a)x) + \bar{F}_1(ax)\bar{F}_2(ax).$$

$$= (1+o(1))(1-a)^{-\alpha}(\bar{F}_1(x) + \bar{F}_2(x)).$$

Yhdistettynä (3.13):een saadaan

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\bar{G}(x)}{\bar{F}_1(x) + \bar{F}_2(x)} = 1.$$

Siis

$$\bar{G}(x) = \left(x^{-\alpha} L_1(x) + x^{-\alpha} L_2(x) \right)(1 + o(1))$$

$$= x^{-\alpha} L(x),$$

missä $L(x) = (1+o(1))(L_1(x) + L_2(x))$, siis L on hitaasti vaihteleva ja $\bar{G} \in R_{-\alpha}$.

Soveltamalla toistuvasti saatua tulosta nähdään, että S_n:llä on säännöllisesti vaihteleva häntä indeksillä $-\alpha$. Lisäksi edellä tehty päättely osoittaa, että jos

$$\mathbb{P}(X > x) = x^{-\alpha} L(x),$$

niin

$$\mathbb{P}(S_n > x) = (1+o(1)) x^{-\alpha} n L(x),$$

Tulos (3.9) seuraa tästä.

Tuloksen (3.10) todistamiseksi riittää näyttää, että jos (3.9) pätee, kun $n=2$, niin X on pakshuhäntäinen.

Oletetaan siis (3.9), kun $n=2$. Olkoon $y>0$ kiinteä. Todistetaan, että

$$(3.15) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\bar F(x-y)}{\bar F(x)} = 1.$$

Selvästi

$$\mathbb{P}(S_2 > x) = \int_0^x \mathbb{P}(X > x-z)\,dF(z) + \mathbb{P}(X>x).$$

Siis jos $y \in (0,x)$, niin

$$\mathbb{P}(S_2 > x) = \bar F(x) + \int_0^y \mathbb{P}(X > x-z)\,dF(z) + \int_y^x \mathbb{P}(X>x-z)\,dF(z)$$

$$\geq \bar F(x) + \bar F(x) F(y) + \bar F(x-y)\left[F(x)-F(y)\right].$$

Olkoon x niin suuri, että $F(x)-F(y)>0$. Jakamalla saatu epäyhtälö $\bar F(x)[F(x)-F(y)]$:llä saadaan

$$\frac{\bar F(x-y)}{\bar F(x)} \leq \left[\frac{\mathbb{P}(S_2>x)}{\bar F(x)} - 1 - F(y)\right]\left[F(x)-F(y)\right]^{-1}$$

$$\to [2-1-F(y)]\,[1-F(y)]^{-1} = 1, \text{ kun } x\to\infty.$$

Tästä seuraa (3.15).

Olkoon

$$L(x) = \bar F(\log x), \quad \forall x>0.$$

Osoitetaan, että L on hitaasti vaihteleva.

Olkoon $x > 0$ kiinteä. Silloin (3.15):n nojalla

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\bar{F}(\log t + \log x)}{\bar{F}(\log t)} = 1, \quad \forall x \in (0,1].$$

Jos $x > 1$, niin sama tulos saadaan kirjoittamalla

$$\frac{\bar{F}(\log t + \log x)}{\bar{F}(\log t)} = \frac{\bar{F}(\log t + \log x)}{\bar{F}((\log t + \log x) - \log x)} .$$

Lemman 3.1 nojalla $x^s L(x) \to \infty$, kun $x \to \infty$, $\forall s > 0$, joten

$$\lim_{y\to\infty} e^{sy} L(e^y) = \lim_{y\to\infty} e^{sy} \bar{F}(y) = \infty.$$

Siis

$$\mathbb{E}(e^{sX}) \geq e^{sy} \bar{F}(y) \to \infty, \text{ kun } y \to \infty. \quad \square$$

3.1. Kevythäntäisten jakaumien summista poikkeamista

Käytetään edelleen kohdan 2 merkintöjä ja oletetaan, että X on kevythäntäinen. Olkoon $a > \mu$ kiinteä. Todennäköisyyden $\mathbb{P}(S_n > na)$ suuruusluokka määrätään seuraavassa esitettävän Cramérin lauseen avulla.

Olkoon c X:n kumulantit generoiva funktio ts.

$$c(s) = \log \mathbb{E}(e^{sX}) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Koska $X \geq 0$, on $c(s) < \infty$, $\forall s \leq 0$. Kevythäntäisyyden nojalla c on äärellinen eräässä origon ympäristössä.

On melko helppo nähdä, että

a) c on konveksi funktio

b) c' on olemassa joukossa $\mathring{D}$, missä

$$D = \{ s \mid c(s) < \infty \}$$

c) Jos $\operatorname{Var} X > 0$, niin c' on aidosti kasvava $\mathring{D}$:ssä.

Motivoivaa jatkon kannalta on myös todeta, että jos D on avoin joukko ja $\operatorname{Var} X > 0$, niin kuvaus

$$c' : D \to \mathring{S}$$

on bijektio, missä S on suppein sellainen suljettu väli, johon X kuuluu todennäköisyydellä yksi.

Funktion c konveksi konjugaatti c^* määritellään ehdosta

$$c^*(v) = \sup_{s \in \mathbb{R}} \{sv - c(s)\} \in [0, \infty]$$

Tällöin c^* on konveksi.

On helppo nähdä, että $c(0) = 0$, $c'(0) = \mu$ ja $c^*(\mu) = 0$. Lisäksi $c^*(v) > 0$, jos $v \neq \mu$ ja

$$c^*(v) = s_v v - c(s_v),$$

jos $c'(s_v) = v$.

Crámerin lause. Jos $F \subseteq \mathbb{R}$ on suljettu, niin

$$\limsup_{n \to \infty} n^{-1} \log \mathbb{P}(S_n/n \in F) \leq -\inf\{c^*(v) \mid v \in F\}$$

ja jos $G \subseteq \mathbb{R}$ on avoin, niin

$$\liminf_{n \to \infty} n^{-1} \log \mathbb{P}(S_n/n \in G) \geq -\inf\{c^*(v) \mid v \in G\}.$$

Jatkossa lauseesta tarvitaan terästetty versio avoimelle välille (a, ∞), missä $a > \mu$. Tällöin pätee seuraava. Jos on olemassa $s_a \in \mathbb{R}$ siten, että

(3.16) $$c'(s_a) = a,$$

niin

(3.17) $$\lim_{n \to \infty} n^{-1} \log \mathbb{P}(S_n/n > a) = -c^*(a).$$

Todistusten ja taustan osalta viitataan kirjaan

Dembo A. and Zeitouni O. (1998), Large deviations techniques and applications.

Pyritään nyt kuvaamaan tapahtuman $\{S_n > na\}$ sisärakennetta. Ts. esitetään arviota osasummien S_m, $m < n$, summusluokasta ehdolla $\{S_n > na\}$.

Määritellään jatkuva-aikaiset prosessit Z_n, $n \in \mathbb{N}$, ehdosta

$$(3.18) \quad Z_n(t) = \frac{S_{[nt]}}{n}, \quad t \in [0,1],$$

missä sovitaan, että $S_0 = 0$ ($[x]$ tarkoittaa x:n kokonaisosaa).

<u>Lause 3.3.</u> Olkoon $a > \mu$ sellainen, että $c'(s_a) = a$ eräälle $s_a \in \mathbb{R}$ ja $\varepsilon > 0$ annettu. Silloin

$$(3.19) \quad \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\Big(\sup_{t \in [0,1]} |Z_n(t) - ta| \le \varepsilon \,\Big|\, S_n > na \Big) = 1.$$

Suurella todennäköisyydellä on siis

$$\frac{S_{[nt]}}{n} \approx ta, \quad \forall t \in [0,1].$$

Tapahtuma $\{S_n > na\}$ sattuu oleellisesti ottaen siten, että $S_{[nt]}$ kasvaa lineaarisesti arvoon na. Raja-arvo (3.19) ottaa kantaa kaikkiin osasummiin S_m, $m \le n$.

Lauseen todistus perustuu yleisiin suurten lukujen lakeihin, joita on käytetty suurten poikkeamien teorian 'sivutuotteina'. Seuraava tarkastelu perustuu lähteisiin Ellis (1984) ja Nummelin (1990).

Lause 3.4. Olkoon $Y_1, Y_2, \ldots$ jono satunnaismuuttujia ja

$$\Lambda(s) = \limsup_{n \to \infty} n^{-1} \log \mathbb{E}_n \{ e^{sY_n} \} \in [-\infty, \infty], \quad s \in \mathbb{R}.$$

Oletetaan, että Λ on äärellinen eräässä origon ympäristössä ja että Λ on derivoituva pisteessä $s = 0$. Jos $\varepsilon > 0$ on annettu, niin voidaan määrätä $k_\varepsilon > 0$ ja n_ε siten, että

$$(3.20) \qquad \mathbb{P}_n \left(\left| \frac{Y_n}{n} - \Lambda'(0) \right| > \varepsilon \right) \le e^{-k_\varepsilon n}$$

kaikilla $n \ge n_\varepsilon$.

Todettakoon, että Y_n:ien ei tarvitse olla määritelty samassa todennäköisyyskentässä. Tulos todistettiin kurssilla 'Johdatus suurten poikkeamien teoriaan', kevät 2008, joten todistus sivuutetaan.

<u>Todistus</u>. Tšebyševin epäyhtälön nojalla mielivaltaiselle $s > 0$,

$$\mathbb{E}_n(e^{sY_n}) \geq \mathbb{E}_n\left(e^{sY_n}\, 1(Y_n/n > \Lambda'(0)+\varepsilon)\right)$$

$$\geq e^{ns(\Lambda'(0)+\varepsilon)}\, \mathbb{P}_n\left(Y_n/n > \Lambda'(0)+\varepsilon\right),$$

joten

$$n^{-1}\log \mathbb{P}_n(Y_n/n > \Lambda'(0)+\varepsilon)$$

$$\leq -s\Lambda'(0) - s\varepsilon + n^{-1}\log \mathbb{E}_n(e^{sY_n}).$$

Rajalla $n \to \infty$ saadaan

$$\limsup_{n\to\infty} n^{-1}\log \mathbb{P}_n(Y_n/n > \Lambda'(0)+\varepsilon)$$

$$\leq -s\Lambda'(0) - s\varepsilon + \Lambda(s).$$

Nyt

$$\Lambda(s) = \Lambda(0) + \Lambda'(0)s + o(1)s$$

$$= \Lambda'(0)s + o(1)s, \quad \text{kun } s \to 0+,$$

joten

$$\limsup_{n\to\infty} n^{-1}\log \mathbb{P}_n(Y_n/n \geq \Lambda'(0)+\varepsilon)$$

$$\leq -s\varepsilon + o(1)s < 0, \quad \text{kun } s \text{ on pieni.}$$

Nähdään, että

$$\mathbb{P}_n(Y_n/n > \Lambda'(0)+\varepsilon) \le e^{-\beta n}$$

eräälle $\beta > 0$, kunhan n on riittävän suuri. Symmetrisesti

$$\mathbb{P}_n(Y_n/n < \Lambda'(0)-\varepsilon) \le e^{-\beta' n}$$

eräälle $\beta' > 0$, kun n on suuri. Siispä

$$\mathbb{P}_n(|Y_n/n - \Lambda'(0)| > \varepsilon)$$

$$\le 2e^{-\min(\beta,\beta')n},$$

kun n on suuri. Voidaan valita esimerkiksi

$$k_\varepsilon = \min(\beta,\beta')/2. \quad \square$$

<u>Lauseen 3.3 todistus.</u> Todistus esitetään seuraavassa vain tapauksessa, jossa

$$\mathbb{P}(|X| \geq M) = 0$$

eräälle $M > 0$.

Olkoon $t \in (0,1)$ kiinteä ja $\varepsilon > 0$. Osoitetaan, että voidaan määrätä sellainen $\delta_t = \delta_{t,\varepsilon} > 0$ ja $n_t = n_{t,\varepsilon}$, että

$$(3.21) \quad \mathbb{P}\Big(\sup_{u \in B(t,\delta_t) \cap [0,1]} |Z_n(u) - ua| > \varepsilon \,\Big|\, S_n > na\Big) \leq e^{-k_t n}$$

kaikilla $n \geq n_t$, missä $k_t = k_{t,\varepsilon} > 0$ on vakio. Tätä varten valitaan $Y_n = S_{[nt]}$ Lauseessa 3.4 ja tarkastellaan ehdollisia tn-mittoja $\mathbb{P}_n$,

$$\mathbb{P}_n(B) = \mathbb{P}(B \mid S_n > na) = \frac{\mathbb{P}(B \cap \{S_n > na\})}{\mathbb{P}(S_n > na)}, \quad B \in \mathcal{B},$$

missä $\mathbb{P}$ viittaa alkuperäiseen tn-mittaan (joka voidaan ottaa tulomitaksi, marginaalijakaumat vastaavat lisäyksiä $X_1, X_2, \ldots$). Lauseen 3.4 soveltamiseksi tarkastellaan generoivia funktioita

$$\mathbb{E}(e^{s S_{[tn]}} \mid S_n > na) = \frac{\mathbb{E}(e^{s S_{[tn]}} \mathbb{1}(S_n > na))}{\mathbb{P}(S_n > na)}.$$

Koska $a > \mu$, $c'(0) = \mu$ ja c on konveksi, on välttämättä $s_a > 0$. Nyt

$$\mathbb{E}\left(e^{s S_{[tn]}} 1(S_n > na)\right)$$

$$\leq \mathbb{E}\left(e^{s S_{[tn]} + s_a(S_n - na)} 1(S_n > na)\right)$$

$$\leq \mathbb{E}\left(e^{s S_{[tn]} + s_a S_n}\right) e^{-n s_a a}$$

$$= e^{[tn]\, c(s+s_a)} e^{(n-[tn])\, c(s_a)} e^{-n s_a a}.$$

Siispä

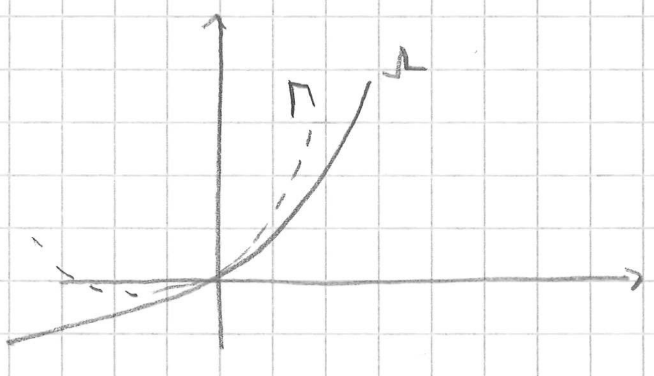
$$\Lambda(s) = \limsup_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbb{E}\left(e^{s S_{[tn]}} \mid S_n > na\right)$$

$$\leq t\, c(s+s_a) + (1-t)\, c(s_a) - s_a a + c^*(a)$$

$$= t\left(c(s+s_a) - c(s_a)\right) \doteq \Gamma(s).$$

Selvästi $\Gamma(0) = 0 = \Lambda(0)$. Koska Λ on konveksi (konveksien funktioiden limsupina), niin ilmeisesti

$$\Lambda'(0) = \Gamma'(0) = t\, c'(s_a) = ta.$$



Lauseen 3.4 nojalla voidaan määrätä $n_t = n_{t,\varepsilon}$ siten, että

$$(3.22) \quad \mathbb{P}\left(|Z_n(t) - ta| > \varepsilon/2 \,|\, S_n > na\right) \le e^{-k_t n}$$

kaikilla $n > n_t$, missä $k_t > 0$ on vakio. Selvästi mielivaltaiselle $u \in (0,t)$,

$$|Z_n(u) - ua| \le |Z_n(t) - ta| + |Z_n(u) - Z_n(t)| + |t-u|a.$$

Koska $|X| \le M$ m.v. niin

$$|Z_n(u) - Z_n(t)| \le \frac{1}{n}\left(|X_{[nu]}| + \dots + |X_{[nt]}|\right)$$
$$\le \frac{([nt] - [nu])M}{n} \to (t-u)M, \text{ kun } n \to \infty.$$

Valitsemalla u siten, että

$$(t-u)M \le \varepsilon/8 \quad \text{ja} \quad (t-u)a \le \varepsilon/8,$$

saadaan implikaatio

$$(3.23) \quad |Z_n(t) - ta| \le \varepsilon/2 \Rightarrow |Z_n(u) - ua| \le \varepsilon.$$

Analogisesti, jos $u > t$ on riittävän pieni, niin (3.22) pätee. Saadaan valitsemalla pieni δ_t,

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{u \in B(t, \delta_t)} | Z_n(u) - ua | > \varepsilon \,\Big|\, S_n > na \Big)$$

$$\leq \mathbb{P}\big(| Z_n(t) - ta | > \varepsilon/2 \,\big|\, S_n > na \big) \leq e^{-k_t n}$$

arvion (3,23) nojalla.

Samoin nähdään, että (3,21) pätee, kun $t = 0$ ja $t = 1$. Saadut avoimet välit $B(t, \delta_t)$ peittävät kompaktin joukon $[0,1]$. Heine-Borelin lauseen nojalla voidaan määrätä äärellinen määrä pisteitä $t_1, \ldots, t_N \in [0,1]$ siten, että

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B(t_j, \delta_{t_j}),$$

Saadaan arvio

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[0,1]} |Z_n(t) - ta| > \varepsilon \,\Big|\, S_n > na \Big)$$

$$= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{j=1}^{N} \Big\{ \sup_{u\in B(t_j, \delta_{t_j})\cap[0,1]} |Z_n(u) - ua| > \varepsilon \Big\} \,\Big|\, S_n > na \Big)$$

$$\leq N \max_{j=1}^{N} \mathbb{P}\Big(\sup_{u\in B(t_j, \delta_{t_j})\cap[0,1]} |Z_n(u) - ua| > \varepsilon \,\Big|\, S_n > na \Big)$$

$$\leq N e^{-k_\varepsilon n} \leq e^{-k_\varepsilon n/2},$$

kun $n \geq \max(n_{\varepsilon,t_1}, \dots, n_{\varepsilon,t_N})$, missä

$k_\varepsilon = \min(k_{\varepsilon,t_1}, \dots, k_{\varepsilon,t_N})$. $\square$

3.2. Paksuhäntäisten jakaumien summista poikkeamista

Tarkastellaan kohdan 3.1 tulosten vastineita, kun X:llä on paksuhäntäinen jakauma.

Lause 3.5. Olkoon $X \geq 0$ ja $\bar{F} \in R_{-\alpha}$, missä $\alpha > 1$. Olkoon $\mu = \mathbb{E}(X)$ ja $a > \mu$ kiinteä. Silloin

$$(3.25) \qquad \mathbb{P}(S_n > na) \sim n\bar{F}(n(a-\mu)), \text{ kun } n \to \infty.$$

Toisin sanoen

$$(3.26) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}(S_n > na)}{n\bar{F}(n(a-\mu))} = 1.$$

Ennen varsinaista todistusta tarkastellaan lauseen todennäköisyyttä karkealla tarkkuudella:

$$\mathbb{P}(S_n > na) \geq \mathbb{P}(M_n > na)$$

$$= 1 - (1 - \bar{F}(na))^n$$

$$= 1 - e^{n \log(1 - \bar{F}(na))}.$$

Koska $\bar{F}(na) \to 0$, saadaan $\log(1-x)$:n Taylorin sarjasta

$$\mathbb{P}(S_n > na) \geq 1 - e^{-n\bar{F}(na)(1+o(1))}.$$

Toisaalta $n\bar{F}(na) \to 0$ lemman 3.1 nojalla, joten

$$\mathbb{P}(S_n > na) \geq 1 - (1 - n\bar{F}(na)(1+o(1)))$$

(3.27) $\qquad = n\bar{F}(na)(1+o(1)).$

Nähdään, että todennäköisyyden $\mathbb{P}(S_n \geq na)$ kertaluokka on vähintään $n^{1-\alpha-\varepsilon}$, $\forall \varepsilon > 0$, $n \to \infty$.

Lemma 3.6. Lauseen 3.5 oletuksin

$$\lim_{x\to\infty} (\log x)^{-1} \log \bar{F}(x) = -\alpha$$

ja

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}((1+\varepsilon)x)}{\bar{F}(x)} = 1.$$

Todistus jätetään harjoitustehtäväksi.

Lemma 3.7. Olkoon $\delta \in (0,1)$ mielivaltainen. Silloin lauseen 3.5 oletuksin

$$\lim_{n\to\infty} (\log n)^{-1} \log \mathbb{P}(S_n > na, M_n \leq n^{1-\delta}) = -\infty.$$

Lemma 3.8. Lauseen 3.5 oletuksin voidaan määrätä $\delta_0 > 0$ ja $\varkappa > 0$ siten, että

$$\mathbb{P}\{S_n > na, X_i > n^{1-\delta} \text{ vähintään 2 indeksillä } i \leq n\}$$

$$= O(n^{1-\alpha-\varkappa})$$

kaikilla $\delta \in (0, \delta_0)$.

Yhdistämällä lemmojen 3.7 ja 3.8 tulokset arvioon (3.27) nähdään, että tapahtuma $\{S_n > na\}$ vastaa olellisesti ottaen täsmälleen yhden suuren X_i:n esiintymistä, $i \leq n$.

Lemman 3.7 todistus. Olkoon

$$\tilde{X} = \tilde{X}(n) = X\, 1(X \le n^{1-\delta}),$$

$$\tilde{X}_j = X_j\, 1(X_j \le n^{1-\delta}), \quad j = 1, \dots, n,$$

sekä

$$\tilde{S}_n = \sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_j.$$

Olkoon edelleen $h_n = n^{-1+\delta/2}$. Selvästi

$$\mathbb{E}(e^{h_n \tilde{X}}) = \mathbb{E}\Big(\frac{e^{h_n \tilde{X}} - 1}{\tilde{X}}\, \tilde{X}\, 1(\tilde{X} > 0)\Big) + 1.$$

Koska $x \mapsto \dfrac{e^{h_n x} - 1}{x}$ määrittelee kasvavan funktion alueessa $x \in (0, \infty)$, niin

$$\text{(3.32)} \qquad \mathbb{E}(e^{h_n \tilde{X}}) \le \frac{e^{h_n n^{1-\delta}} - 1}{n^{1-\delta}}\, \mu + 1.$$

Tshebyshevin epäyhtälön nojalla

$$\mathbb{E}(e^{h_n \tilde{S}_n}) \ge \mathbb{E}(e^{h_n \tilde{S}_n}\, 1(\tilde{S}_n > na))$$

$$\text{(3.33)} \qquad \ge e^{h_n n a}\, \mathbb{P}(\tilde{S}_n > na).$$

Saadaan siis

$$\mathbb{P}(\tilde{S}_n > na) \le e^{-h_n n a}\, \mathbb{E}(e^{h_n \tilde{S}_n})$$

$$= e^{-h_n n a}\, \mathbb{E}(e^{h_n \tilde{X}})^n \le e^{-h_n n a}\Big(\frac{e^{h_n n^{1-\delta}} - 1}{n^{1-\delta}}\, \mu + 1\Big)^n.$$

Koska $h_n n^{1-\delta} = n^{-\delta/2} \to 0$, niin

$$\left(\frac{e^{h_n n^{1-\delta}} - 1}{n^{1-\delta}} \mu + 1 \right)^n = ((1+o(1))h_n \mu + 1)^n$$

$$= e^{n \log((1+o(1))h_n \mu + 1)} = e^{n h_n \mu (1+o(1))}.$$

Siis

$$\mathbb{P}(\tilde{S}_n > na) \le e^{-h_n n a + h_n n \mu (1+o(1))}$$

$$= e^{-n^{\delta/2}(a - \mu(1+o(1)))}.$$

Koska $a > \mu$, saadaan

$$\mathbb{P}(S_n > na, M_n \le n^{1-\delta})$$

$$\le \mathbb{P}(\tilde{S}_n > na) \le e^{-n^{\delta/2}\varepsilon}$$

eräälle $\varepsilon > 0$. Tämä todistaa lemman. $\square$

Lemman 3.8 todistus. Lemman todennäköisyys on kuvattavissa (lemma 3.6)

$$\sum_{\substack{i,j\le n\\ i\ne j}} \mathbb{P}(X_i > n^{1-\delta}, X_j > n^{1-\delta})$$

$$= \binom{n}{2} \bar{F}(n^{1-\delta})^2$$

$$\le \binom{n}{2} (n^{1-\delta})^{2(-\alpha+\varepsilon)}$$

$$\le n^{2-2\alpha+2\alpha\delta+2\varepsilon(1-\delta)}, \quad \text{kun } n \text{ suuri,}$$

missä $\varepsilon > 0$ voidaan valita mielivaltaisen pieneksi. Rajalla $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$, potenssi on

$$2(1-\alpha) = 1-\alpha-\varkappa', \quad \varkappa' = \alpha - 1 > 0.$$

Tästä lemman väite seuraa. $\square$

<u>Lause 3.9.</u> Olkoon $\varepsilon > 0$ pieni ja

$$A_n = A_n(\varepsilon) = \{ X_i > n(a-\mu-\varepsilon) \text{ jollain } i \le n \},$$

$$B_n = B_n(\varepsilon) = \{ X_i > n^{1-\varepsilon} \text{ tasan yhdellä indeksillä } i \le n \}.$$

Silloin on olemassa $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ siten, että

$$(3.34) \quad \mathbb{P}(S_n > na) = \mathbb{P}(\{S_n > na\} \cap A_n \cap B_n) + O(n^{1-\alpha-\delta}).$$

Erityisesti

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B_n \mid S_n > na) = 1.$$

<u>Todistus.</u> Arviosta (3.27) ja lemmasta 3.6 seuraa, että

$$(3.35) \quad \liminf_{n\to\infty} (\log n)^{-1} \log \mathbb{P}(S_n > na) \ge 1-\alpha.$$

Lauseen ensimmäisen väitteen todistamiseksi riittää näyttää, että

$$\limsup (\log n)^{-1} \log \mathbb{P}(\{S_n > na\} \cap \{A_n^c \cup B_n^c\}) < 1-\alpha.$$

Lemmojen 3.7 ja 3.8 nojalla

$$\limsup (\log n)^{-1} \log \mathbb{P}(\{S_n > na\} \cap B_n^c) < 1-\alpha.$$

Toisaalta

$$\mathbb{P}(\{S_n > na\} \cap A_n^c)$$

$= \mathbb{P}(S_n > na,\ M_n \leq n(a-\mu-\varepsilon),\ X_i > n^{1-\varepsilon}$ tasan yhdellä indeksillä $i \leq n) + O(n^{1-\alpha-\varkappa})$

eräälle $\varkappa > 0$ alkuosan nojalla. Viimeinen todennäköisyys on korkeintaan

$$n\,\mathbb{P}(S_n > na,\ X_1, \dots, X_{n-1} \leq n^{1-\varepsilon},\ X_n \in (n^{1-\varepsilon}, n(a-\mu-\varepsilon)])$$

$$\leq n\,\mathbb{P}(S_{n-1} > n(\mu+\varepsilon),\ X_1, \dots, X_{n-1} \leq n^{1-\varepsilon})$$

$= O(n^{1-\alpha-\varkappa})$ lemman 3.7 nojalla.

Nähdään, että myös

$$\limsup\, (\log n)^{-1} \log \mathbb{P}(\{S_n > na\} \cap A_n^c) < 1-\alpha.$$

Lauseen toinen väite seuraa ensimmäisestä ja alarajasta (3.35). Nimittäin

$$\frac{O(n^{1-\alpha-\varkappa})}{\mathbb{P}(S_n > na)} \to 0,$$

joten (3.34):n nojalla

$$\mathbb{P}(A_n \cap B_n \mid S_n \geq na) = 1 + o(1). \ \square$$

Lauseen 3.5 todistus. Lauseen 3.9 nojalla

$$\mathbb{P}(S_n > na) \le \mathbb{P}(A_n \cap B_n) + O(n^{1-\alpha-\varkappa})$$

$$\le \mathbb{P}(A_n) + O(n^{1-\alpha-\varkappa})$$

$$\le n\bar{F}(n(a-\mu-\varepsilon)) + O(n^{1-\alpha-\varkappa}).$$

Toisaalta

$$\mathbb{P}(S_n > na) \ge n\,\mathbb{P}\big(S_{n-1} > n(\mu-\varepsilon),\ X_i \le n^{1-\varepsilon}, \forall i \le n-1,\ X_n > n(a-\mu+\varepsilon)\big).$$

Nyt

$$\mathbb{P}(S_{n-1} > n(\mu-\varepsilon)) \to 1, \text{ kun } n \to \infty,$$

suurten lukujen lain nojalla. Toisaalta

$$\mathbb{P}(X_i \le n^{1-\varepsilon}, \forall i \le n-1) = (1-\bar{F}(n^{1-\varepsilon}))^{n-1}$$

$$= e^{(n-1)\log(1-\bar{F}(n^{1-\varepsilon}))} \ge e^{-(n-1)\bar{F}(n^{1-\varepsilon})}$$

$\to 1$, kun $n \to \infty$ (sillä $(n-1)\bar{F}(n^{1-\varepsilon}) \to 0$,

kun ε on pieni). Nähdään, että

$$\mathbb{P}(S_n > na) \ge n\,\mathbb{P}(S_{n-1} > n(\mu-\varepsilon), X_i \le n^{1-\varepsilon}, \forall i \le n-1) \cdot \mathbb{P}(X_n > n(a-\mu+\varepsilon))$$

$$= n(1+o(1))\bar{F}(n(a-\mu+\varepsilon)).$$

Yhdistämällä tulokset saadaan annetulle $\varepsilon > 0$

$$(1+o(1))\, n\, \bar{F}(n(a-\mu+\varepsilon)) \le \mathbb{P}(S_n > na) \le (1+o(1))\, n\, \bar{F}(n(a-\mu-\varepsilon)).$$

Lauseen väite seuraa nyt lemmasta 3.6: olkoon $\varepsilon' > 0$ annettu. Valitaan ε niin pieneksi, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\bar{F}(n(a-\mu-\varepsilon))}{\bar{F}(n(a-\mu))} \le 1+\varepsilon'.$$

Kun n on riittävän suuri, on siis

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n > na) &\le (1+o(1))\, n\, \bar{F}(n(a-\mu-\varepsilon)) \\ &\le (1+\varepsilon')\, n \cdot \frac{\bar{F}(n(a-\mu-\varepsilon))}{\bar{F}(n(a-\mu))} \cdot \bar{F}(n(a-\mu)) \\ &\le (1+\varepsilon')(1+2\varepsilon')\, n\, \bar{F}(n(a-\mu)).\end{aligned}$$

Samoin nähdään, että

$$\mathbb{P}(S_n > na) \ge v(\varepsilon')\, n\, \bar{F}(n(a-\mu)),$$

missä $v(\varepsilon') \to 1$, kun $\varepsilon' \to 0$. $\square$

Tarkastellaan nyt kohdan 3.1 tapaan, miten f_n saavuttaa suuren arvon n.q. Olkoon jatkuva-aikainen prosessi Z_n kuten (3.18):ssa.

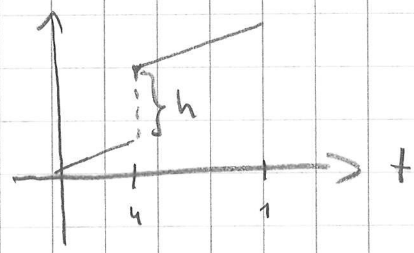
Olkoon

$$B(0,1) = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ rajoitettu} \}.$$

Kiinteällä $\omega \in \Omega$, Z_n voidaan tulkita $B(0,1)$:n alkioksi.

Olkoon $u \in (0,1]$ ja $a > \mu$ sekä $h \geq a - \mu$. Määritellään

(3.42) $$f_{u,h}(t) = \begin{cases} \mu t, & t < u \\ h + \mu t, & t \geq u. \end{cases}$$



Kahden funktion $f, g \in B(0,1)$ etäisyys määritellään ehdosta

$$d(f,g) = \sup\{ |f(t) - g(t)| \mid t \in [0,1] \}.$$

Funktion f etäisyys joukosta $A \subseteq B(0,1)$ määritellään ehdosta

$$d(f, A) = \inf \{ d(f,g) \mid g \in A \}.$$

Kiinnitetään

$$G = \{ f_{u,h} \mid u \in (0,1],\ h \geq a-\mu \},$$

missä $f_{u,h}$ on (3.42):n mukainen.

Osoitetaan seuraavaa, että Z_n on lähellä joukkoa G, mikäli $\{S_n > na\}$. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja

$$G(\varepsilon) = \{ f \in B(0,1) \mid d(f, G) \leq \varepsilon \}.$$

Merkitään lisäksi

$$G_u = \{ f_{u,h} \mid h \geq a-\mu \}$$

ja

$$G_u(\varepsilon) = \{ f \in B(0,1) \mid d(f, G_u) \leq \varepsilon \},$$

$u \in (0,1]$, $\varepsilon > 0$.

Lemma 3.10. Lauseen 3.5 oletuksin, $\forall \varepsilon > 0$, $r > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,r]} |Z_n(t) - \mu t| \geq \varepsilon \right) = 0.$$

Todistus. Tunnetusti

(3.43) $\qquad \frac{S_n}{n} = Z_n(1) \to \mu$ m.v. kun $n \to \infty$.

Olkoon ω sellainen, että (3.43) pitee ja $n_\varepsilon = n_\varepsilon(\omega)$ sellainen, että

(3.44) $\qquad \left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| < \varepsilon$, kun $n > n_\varepsilon$.

Olkoon $\delta \in (0, r)$ kiinteä. Jos $t \in [\delta, r]$, niin

$$\left| \frac{S_{[nt]}}{n} - \mu t \right| = t \left| \frac{S_{[nt]}}{[nt]} \cdot \frac{[nt]}{nt} - \mu \right|$$

$$= t \frac{[nt]}{nt} \left| \frac{S_{[nt]}}{[nt]} - \mu + \mu \left(1 - \frac{nt}{[nt]}\right) \right|$$

$$\leq t \underbrace{\left| \frac{S_{[nt]}}{[nt]} - \mu \right|}_{< \varepsilon, \text{ kun } n > \frac{n_\varepsilon + 1}{t}} + \underbrace{t\mu \left(\frac{nt}{[nt]} - 1 \right)}_{\leq t\mu \cdot \left(\frac{nt}{nt-1} - 1\right) = \frac{t\mu}{nt-1} \leq \frac{r\mu}{n\delta - 1} \leq \frac{2\mu r}{n\delta}}$$

Nähdään, että voidaan määrätä n_ε' siten, että

$$\left| \frac{S_{[nt]}}{n} - \mu t \right| \leq 2\varepsilon, \quad \forall t \in [\delta, r], \text{ kun } n > n_\varepsilon'.$$

Siis

$$(3.45)\quad \sup_{t\in[\delta,r]} |Z_n(t)-\mu t| \le 2\varepsilon, \text{ kun } n>n_\varepsilon'.$$

Toisaalta

$$\sup_{t\in[0,\delta]} |Z_n(t)-\mu t| \le \sup_{t\in[0,\delta]} |Z_n(t)| + \delta\mu$$

$$= |Z_n(\delta)| + \delta\mu \le 2\varepsilon + 2\delta\mu, \text{ kun } n>n_\varepsilon'.$$

Nähdään (3.35):n nojalla, että

$$\sup_{t\in[0,r]} |Z_n(t)-\mu t| \to 0, \text{ m.v.}$$

Tästä seuraa väite. $\square$

Lause 3.11. Lauseen 3.5 oletuksin, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n \in G(\varepsilon) \mid S_n > na) = 1.$$

Todistus. Lauseen 3.9 nojalla (ja merkinnöin)

$$\mathbb{P}(S_n > na,\ Z_n \notin G(\varepsilon))$$

$$= \mathbb{P}(\{S_n > na\} \cap \{Z_n \notin G(\varepsilon)\} \cap A_n \cap B_n) + O(n^{1-\alpha-\delta})$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > n(a-\mu-\varepsilon/2),\ X_j \le n^{1-\varepsilon},\ \forall j \in \{1,\dots,n\}\setminus\{i\},$$
$$Z_n \notin G(\varepsilon)) + O(n^{1-\alpha-\delta}).$$

Merkitään P_i:llä yksittäisiä termejä edellisessä summassa. Selvästi

$$P_i \le \mathbb{P}(X_i > n(a-\mu-\tfrac{\varepsilon}{2}),\ Z_n \notin G(\varepsilon))$$
$$= \mathbb{P}(Z_n(\tfrac{i}{n}) - Z_n(\tfrac{i-1}{n}) > a-\mu-\tfrac{\varepsilon}{2},\ Z_n \notin G(\varepsilon))$$

Jos

$$|Z_n(t) - \mu t| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall t < \frac{i}{n},$$

ja

$$|Z_n(t) - Z_n(\tfrac{i}{n}) - \mu(t-\tfrac{i}{n})| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall t \in [\tfrac{i}{n}, 1],$$

niin

$$Z_n \in G_{\frac{i}{n}}(\varepsilon),$$

jos lisäksi $X_i > n(a-\mu-\frac{\varepsilon}{2})$. Nähdään, että

$$P_i \le \mathbb{P}\left(X_i > n(a-\mu-\tfrac{\varepsilon}{2}),\ \sup_{t<\frac{i}{n}} |Z_n(t)-\mu t| \ge \tfrac{\varepsilon}{2} \right)$$
$$+ \mathbb{P}\left(X_i > n(a-\mu-\tfrac{\varepsilon}{2}),\ \sup_{t\in[\frac{i}{n},1]} |Z_n(t)-Z_n(\tfrac{i}{n})-\mu(t-\tfrac{i}{n})| \ge \tfrac{\varepsilon}{2} \right).$$

Ensimmäinen termi on korkeintaan

$$\bar{F}(n(a-\mu-\tfrac{\varepsilon}{2}))\ \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} |Z_n(t)-\mu t| \ge \tfrac{\varepsilon}{2} \right).$$

Ilmeisesti

$$\sup_{t\in[\frac{i}{n},1]} |Z_n(t)-Z_n(\tfrac{i}{n})-\mu(t-\tfrac{i}{n})|$$

on saman jakautunut kuin

$$\sup_{t\in[0,1-\frac{i}{n}]} |Z_n(t)-\mu t|.$$

Kuten edellä nähdään, että

$$P_i \le 2\bar{F}(n(a-\mu-\tfrac{\varepsilon}{2}))\ \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} |Z_n(t)-\mu t| \ge \tfrac{\varepsilon}{2} \right).$$

Siispä

$$\mathbb{P}(S_n > na,\ Z_n \notin G(\varepsilon))$$

$$\leq 2n\bar{F}(n(a-\mu-\tfrac{\varepsilon}{2}))\,\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,1]} |Z_n(t)-\mu t| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}) + O(n^{1-\alpha-\delta}).$$

Lemmojen 3.4 ja 3.10 nojalla

$$\mathbb{P}(S_n > na,\ Z_n \notin G(\varepsilon)) \leq 3n\bar{F}(n(a-\mu))\,o(1) + O(n^{1-\alpha-\delta})$$

$$= o(1)\,\mathbb{P}(S_n > na)$$

(Lause 3.5). Väite seuraa tästä. $\square$

Lähteitä

Kohta 2.

Leadbetter, Lindgren and Rootzen (1983). Extremes and related properties of random sequences and processes, Springer.

Embrechst, Klüppelberg and Mikosch (1997). Modelling Extremal Events, Springer.

Bingham, Goldie and Teugels (1987). Regular variation, Cambridge University Press.

Feller (1971). An introduction to Probability Theory and its Applications, Wiley & Sons.

Kohta 3.

Ks. Embrechst et al.

Nagaev (1979). Large deviations of sums of independent random variables, Ann. Prob. 7, No. 5, 745-789.

Nummelin (1990). Large deviations for functionals of stationary processes, Prob. Th. Rel. Fields 86, 387-401.

Hu (2002). Precise large deviations for heavy-tailed individual risk models with applications to the discounted claims. Preprint of School of Mathematics and Statistics, Wuhan University.

Asmussen and Klüppelberg (1996). Large deviations for subexponential tails with applications to insurance risk. Stochastic Process. Appl. 64, 103-125.

Ellis, R. (1984). Large deviations for a general class of random vectors. Ann. Prob. 12, 1-12.

Sisällysluettelo