Liite 1

Liitteessä tarkastellaan hitaasti vaihtelevien funktioiden ominaisuuksia. Tulokset vaaditaan tentissä, mutta todistuksia ei.

Lähde: Bingham et al. (1987) Regular variation. Cambridge University Press.

Lause L1. Olkoon L hitaasti vaihteleva mitallinen funktio. Silloin

$$\frac{L(tx)}{L(t)} \xrightarrow{t\to\infty} 1 \quad \text{tasaisesti}$$

jokaisessa kompaktissa joukossa $K \subseteq (0, \infty)$.

Todistus. Kirjoitetaan $H(x) = \log L(e^x)$. Riittää näyttää, että

$$H(t+x) - H(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0 \quad \text{tasaisesti}$$

jokaisessa joukossa $[0, A]$, $A > 0$.

Olkoon $c \in (0, A)$ ja $\varepsilon > 0$ pieni. Mielivaltaiselle $x > 0$ kirjoitetaan

$$\begin{cases} I_x = [x, x+2A], \\ E_x = \{t \in I_x ; |H(t) - H(x)| \geq \varepsilon\}, \\ E_x^* = \{t \in [0, 2A] ; |H(t+x) - H(x)| \geq \varepsilon\}. \end{cases}$$

Tällöin $m(E_x) = m(E_x^*)$, missä m tarkoittaa Lebesgue-mittaa. Koska $H(t+x) - H(x) \to 0$, $x \to \infty$, niin

$$m(E_x^*) \to 0, \quad \text{kun } x \to \infty.$$

Olkoon x_0 sellainen, että $m(E_x) < \varepsilon$, kun $x > x_0$.

Jos $c \in [0, A]$, niin

$$m(I_x \cap I_{x+c}) = m([x+c, x+2A]) = 2A - c \geq A.$$

Toisaalta

$$m(E_x \cup E_{x+c}) \leq m(E_x^*) + m(E_{x+c}^*) < 2\varepsilon.$$

Valitsemalla ε pieneksi päästään tilanteeseen, jossa

$$m((I_x \cap I_{x+c}) \setminus (E_x \cup E_{x+c})) > 0.$$

Jos $t_0 \in (I_x \cap I_{x+c}) \setminus (E_x \cup E_{x+c})$, niin

$$|H(t_0) - H(x)| < \varepsilon$$

ja

$$|H(t_0) - H(x+c)| < \varepsilon.$$

Siis kaikilla $c \in [0, A]$ ja $x > x_0$,

$$|H(x+c) - H(x)| < 2\varepsilon. \quad \square$$

<u>Seuraus L2.</u> Jos L on hitaasti vaihteleva mitallinen funktio, niin on olemassa $x_0 > 0$ siten, että

$$\sup_{t \in [x_0, T]} L(t) < \infty$$

kaikilla $T > x_0$.

<u>Todistus.</u> Olkoon $H(x) = \log L(e^x)$, $x \in \mathbb{R}$. Lauseen L1 nojalla voidaan määrätä sellainen x_0, että

$$|H(x+u) - H(x)| < 1$$

kaikilla $u \in [0,1]$, $x \geq x_0$. Siis

$$|H(x)| \leq 1 + |H(x_0)|$$

kaikilla $x \in [x_0, x_0+1]$. Induktiolla nähdään, että

$$|H(x)| \leq n + |H(x_0)|$$

kaikilla $x \in [x_0, x_0+n]$. Saman tyyppinen tulos pätee luonnollisesti funktiolle L. $\square$

<u>Lause L3.</u> Mitallinen funktio $L: [0,\infty) \to (0,\infty)$ on hitaasti vaihteleva, jos ja vain jos se on muotoa

$$L(x) = c(x) \exp\left(\int_a^x \frac{\varepsilon(u)}{u}\, du \right)$$

kaikilla $x \geq a$ eräälle $a > 0$, missä c ja ε ovat mitallisia, $c(x) \to c \in (0,\infty)$ ja $\varepsilon(x) \to 0$, kun $x \to \infty$.

<u>Todistus.</u> Olkoon L hitaasti vaihteleva ja

$$H(x) = \log L(e^x)$$

kuten aiemminkin. Seurauksen L2 nojalla

$$\int_{x_0}^{T} H(t)\, dt < \infty$$

kaikilla $T > x_0$ eräälle $x_0 > 0$. Jos x on suuri, niin

$$H(x) = \int_x^{x+1} (H(x) - H(t))\, dt + \int_{x_0}^{x} (H(t+1) - H(t))\, dt + \int_{x_0}^{x_0+1} H(t)\, dt.$$

Selvästi

$$H(x+1) - H(x) \to 0, \quad x \to \infty,$$

ja

$$\int_x^{x+1} (H(x) - H(t))\, dt = \int_0^1 (H(x) - H(x+t))\, dt \to 0, \quad x \to \infty,$$

dominoidun konvergenssin ja lauseen L1 nojalla.

Siis

$$H(x) = d(x) + \int_{x_0}^{x} e(t)\,dt,$$

missä

$$e(t) = H(t+1) - H(t)$$

$$d(x) = \int_{x_0}^{x_0+1} H(t)\,dt + \int_0^1 (H(x) - H(x+t))\,dt.$$

Edellä saatujen tulosten nojalla $e(t) \to 0$, $t \to \infty$, ja

$$\begin{cases} d(x) = c + \int_0^1 (H(x) - H(x+t))\,dt \to c, \quad x \to \infty, \\ c = \int_{x_0}^{x_0+1} H(t)\,dt. \end{cases}$$

Siispä

$$\begin{aligned} L(x) &= e^{H(\log x)} \\ &= e^{d(\log x)}\, e^{\int_{x_0}^{\log x} e(t)\,dt} \\ &= c(x)\, e^{\int_a^x \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt}, \end{aligned}$$

missä $a = e^{x_0}$, $c(x) = e^{d(\log(x))}$, $\varepsilon(t) = e(\log t)$.

Saaduista tuloksista seuraa vaadittu esitys.

Käänteisen tuloksen todistaminen on suoraviivainen. $\square$

<u>Seuraus L4.</u> Lauseen L3 oletuksin

$$\lim_{x \to \infty} (\log x)^{-1} \log L(x) = 0.$$

<u>Todistus.</u> Suoraviivainen. $\square$