VEKTORIANALYYSI
LASKUHARJOITUS 9
SYKSY 2013

1. Integroi funktio $f(x,y,z) = z^2$ yli avaruuden $\mathbb{R}^3$ yksikköpallon $B(\bar{0},1)$.

2. Laske integraali

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz,$$

kun $f(x,y,z) = x^2+y^2$ ja $B \subset \mathbb{R}^3$ on 1. oktantissa sijaitseva kappale, jota rajoittavat sylinteripinnat $x^2+y^2 = 1$ ja $x^2+y^2 = 4$, sekä tasot $z = 0$, $z = 1$, $x = 0$ ja $x = y$. Ohje. Sylinterikoordinaatit.

3. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^3$ kappale, jota rajoittaa yläpuolelta taso $z = 3-2y$ ja alapuolelta paraboloidi $z = x^2+y^2$. Laske A:n tilavuus, eli integroi vakiofunktio 1 yli joukon A. Ohje. Muuttujan z integroimisrajat määräytyvät suoraan annetuista pinnoista. Mitä tulee muihin muuttujiin, mainittujen pintojen leikkaus sijaitsee sylinteripinnalla S, joka on muotoa

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2\},$$

missä a, b ja c ovat reaalilukuja. Määrää ensin nämä luvut. Tästä saat integroimisrajat x:lle ja y:lle.

4. Kuten tehtävä 3, mutta A:ta rajoittaa yläpuolelta pallopinta $x^2+y^2+z^2 = 6$ ja alapuolelta paraboloidi $z = x^2+y^2$. (Sylinterikoordinaatit. Voit käyttää tietoa, että pallopinta ja paraboloidi leikkaavat sylinteripinnalla $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}$.)

5. Laske avaruuden $\mathbb{R}^3$ käyräintegraali

$$\int_\gamma (x^2+y)ds,$$

kun $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) := (t^2, 1, t^2)$.

6. Laske

$$\int\limits_\Gamma ydx - xdy + dz, \qquad (*)$$

kun Γ on jana, jonka alkupiste on $(1,0,0)$ ja loppupiste $(0,1,1)$.

Merkintä $(*)$ tarkoittaa oppikirjan merkinnöin käyräintegraalia

$$\int\limits_\Gamma F \cdot d\bar{s},$$

missä $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on vektorikenttä $F(x,y,z) := (y,-x,1)$.

****

1. Integrate the function $f(x,y,z) = z^2$ over the unit ball $B(\bar{0},1)$ of the space $\mathbb{R}^3$.

2. Calculate the integral

$$\iiint_B f(x,y,z)dxdydz,$$

when $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ and $B \subset \mathbb{R}^3$ is a body situated in the 1st octant of $\mathbb{R}^3$, bounded by the cylindrical surfaces $x^2 + y^2 = 1$ and $x^2 + y^2 = 4$, and the planes $z = 0$, $z = 1$, $x = 0$ and $x = y$. Hint. Use cylinder coordinates.

3. Let $A \subset \mathbb{R}^3$ be a body bounded from above by the plane $z = 3 - 2y$ and from below the paraboloid $z = x^2 + y^2$. Calculate the volume of A, i.e. integrate the constant function 1 over A. Instructions. The integration bounds of z are directly determined by the given surfaces. As for the other variables, the intersection of the two given surfaces is a subset of the cylinder S,

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2\},$$

where a, b and c are real numbers. Finding these numbers first, you can determine the integration bounds for x and y.

4. The same as the problem 3, but A is bounded from above by the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ and from below the paraboloid $z = x^2 + y^2$. (Cylinder coordinates. Notice that the intersection of the sphere and paraboloid is contained in the cylinder $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$.)

5. Calculate the path integral in the space $\mathbb{R}^3$,

$$\int_\gamma (x^2 + y)ds$$

for $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) := (t^2, 1, t^2)$.

6. Calculate

$$\int_\Gamma ydx - xdy + dz, \qquad (*)$$

when Γ is a line segment starting from $(1,0,0)$ and ending at $(0,1,1)$.

The formula $(*)$ means in the notation of Martio's book the path integral

$$\int_\Gamma F \cdot d\bar{s},$$

where $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is the vector field $F(x,y,z) := (y, -x, 1)$.