

VEKTORIANALYYSI
LASKUHARJOITUS 7
SYKSY 2013

1. Laske $\int_A (x^2 + xy + y^2) dx dy$, kun

a) $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq x^2\}$,

b) $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, -y^2 \leq x \leq y\}$.

2. Olkoon $D := [-3\pi, 3\pi] \times [-3\pi, 3\pi]$ ja $A := [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$. Laske

$$\int_B \sin(x_1 + x_2) dx_1 dx_2,$$

kun $B = D \setminus A$.

3. Olkoon G kolmio, jonka pisteet (x, y) toteuttavat $-2 \leq x \leq 2$ ja $0 \leq y \leq 2 - |x|$. Laske integraali

$$\int_G (x^3 y + \cos x) dx dy.$$

4. Laske $\int_{[0,2] \times [0,2]} f dx dy$, kun $f : [0, 2] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ on funktio

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \geq \sqrt{y} \\ xe^y, & \text{jos } x < \sqrt{y}. \end{cases}$$

5. Olkoon $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Osoita (vrt. oppikirja, Lauseen 4.1.6 todistus), että funktio

$$y \mapsto \int_a^b f(x, y) dx$$

on jatkuva joukossa $[c, d]$.

6. Olkoot funktiot $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, missä $g(x) > 0$ kaikilla $x \in [0, 1]$, sekä $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuvia. Osoita, että seuraava funktio $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva:

$$\psi(x) = \int_0^{g(x)} f(x, y) dy.$$

Vinkkejä. – Useissa tehtävissä on syytä jakaa integroimisalue osiin ja käsitellä osat erikseen. – Kompaktissa joukossa jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva.

1. Calculate the integral $\int_A (x^2 + xy + y^2) dx dy$ for

a) $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq x^2\}$,

b) $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, -y^2 \leq x \leq y\}$.

2

2. Let $D := [-3\pi, 3\pi] \times [-3\pi, 3\pi]$ ja $A := [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$. Calculate

$$\int_B \sin(x_1 + x_2) dx_1 dx_2,$$

when $B = D \setminus A$.

3. Let G be a triangle such that its points (x, y) satisfy $-2 \leq x \leq 2$ ja $0 \leq y \leq 2 - |x|$. Calculate the integral

$$\int_G (x^3 y + \cos x) dx dy.$$

4. Determine $\int_{[0,2] \times [0,2]} f dx dy$, when $f : [0, 2] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ is the function

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \geq \sqrt{y} \\ xe^y, & \text{if } x < \sqrt{y}. \end{cases}$$

5. Let $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ be a continuous function. Prove that the function

$$y \mapsto \int_a^b f(x, y) dx$$

is continuous in the set $[c, d]$.

6. Let the functions $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, where $g(x) > 0$ for $x \in [0, 1]$, and $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be continuous. Show that the following function $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ is also continuous:

$$\psi(x) = \int_0^{g(x)} f(x, y) dy.$$

Hints. – In several problems you have to divide the integration domain to subdomains and treat them separately. – A function continuous in a compact set is also uniformly continuous.