VEKTORIANALYYSI
LASKUHARJOITUS 6
SYKSY 2013

Implisiittifunktiolause: Olkoon $F \in C^1(D)$, missä $D \subset \mathbb{R}^2$ avoin, ja oletetaan, että pisteessä $(a,b) \in D$ pätee

$$F(a,b) = 0, \qquad \partial_2 F(a,b) \neq 0.$$

Tällöin on olemassa pisteen a ympäristö $B(a,r) \subset \mathbb{R}$ ja pisteen b ympäristö $B(b,s) \subset \mathbb{R}$, joille pätee: kun $x \in B(a,r)$, niin yhtälöllä

$$F(x,y) = 0$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $y = y(x) =: \phi(x) \in B(b,s)$. Näin määritelty ("implisiitti")funktio $\phi : B(a,r) \to B(b,s)$ on kerran jatkuvasti derivoituva, ja sen derivaatta saadaan kaavasta

$$\phi'(x) = -\frac{\partial_1 F(x,\phi(x))}{\partial_2 F(x,\phi(x))}.$$

1. Totea, että yhtälö

$$2x^3 + x^2 - xy^3 - 2y^2 = 0$$

määrittelee tason pisteen $(1,1)$ ympäristössä muotoa $\{(x,y) \,:\, y = \phi(x)\}$ olevan käyrän. Esitä käyrän tangentin yhtälö pisteessä $(1,1)$.

2. Tutki vastaavasti yhtälöä a) $e^x - e^y - x\cos y = 0$, b) $x^3 - 2x + 2y^3 + y^2 = 0$, pisteen $(0,0)$ ympäristössä.

Integraalilaskentaan valmistavia tehtäviä; integraalin määritelmä, laskukaavojen perustelut yms. esitetään luennoilla.
Jos (integroimisjoukko) $D := [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ on tason suljettu suorakulmio ja $f : D \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin f:n integraali yli D:n eli lauseke $\int_D f dA$ lasketaan peräkkäisillä integroinneilla, eli jommalla kummalla kaavoista

$$\int_D f dA = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y) dy \Big) dx \quad \text{tai} \quad \int_D f dA = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y) dx \Big) dy.$$

Esimerkiksi ensimmäisen kaavan sisemmässä integroinnissa pidetään muuttujaa x vakiona, ja y-integrointi tuottaa x:stä riippuvan funktion. Sen jälkeen suoritetaan ulompi integrointi.

3. Laske integraali $\int_D f dA$, kun $D = [0,2] \times [2,4]$ ja

a) $f(x,y) := 2x^2 - y^2 + 3xy$, b) $f(x,y) := \cos(\pi x) - xe^{-y}$.

4. Esimerkki yleisemmästä integroimisjoukosta: jos $a < b$ ja $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva funktio, $\phi(x) \geq 0$, sekä

$$D := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \phi(x)\},$$

(piirrä kuva joukosta D), niin integraalin laskukaava on vastaavasti

$$\int_D f dA = \int_a^b \Big(\int_0^{\phi(x)} f(x,y) dy \Big) dx,$$

missä siis integroitava $f : D \to \mathbb{R}$ on annettu jatkuva funktio. Laske tämä integraali, kun $[a, b] = [0, 5]$ ja $\phi(x) = x^2$ sekä $f(x, y) = xy + 3y^2$.

5. Laske $\int\limits_D f dA$ kun D on kolmio, jonka kärjet ovat pisteissä $(0, 0)$, $(0, 1)$ ja $(1, 1)$, sekä

$$\text{a)}\quad f(x, y) := xy^2, \qquad \text{b)}\quad f(x, y) := \frac{xy}{3 + y^4}.$$

Neuvo. Tämä on samaa muotoa kuin tehtävä 4.

6. Mieti (arvausmenetelmällä!) yllä mainitun integraalikäsitteen geometrista tulkintaa ja sekä integraalin määritelmää (tapauksessa D on suorakulmio) yleistämällä Riemannin summien käsitteen kahden muuttujan funktioille. Todistuksia ei tarvitse esittää.

****

Implicit function theorem: Let $F \in C^1(D)$, where $D \subset \mathbb{R}^2$ is open, and assume that

$$F(a, b) = 0, \qquad \partial_2 F(a, b) \neq 0$$

hold true at the point $(a, b) \in D$. Then there exist neighbourhoods $B(a, r) \subset \mathbb{R}$ and $B(b, s) \subset \mathbb{R}$ with the following property: if $x \in B(a, r)$, the the equation

$$F(x, y) = 0$$

has a unique solution $y = y(x) =: \phi(x) \in B(b, s)$. The (implicit) function $\phi : B(a, r) \to B(b, s)$ which has been defined in this way, is continuously differentiable, and the derivative can be calculated with the help of the formula

$$\phi'(x) = -\frac{\partial_1 F(x, \phi(x))}{\partial_2 F(x, \phi(x))}.$$

1. Show that the equation

$$2x^3 + x^2 - xy^3 - 2y^2 = 0$$

defines a curve $\{(x, y) : y = \phi(x)\}$ in a neighbourhood of the point $(1, 1)$. Write the equation for the tangent line at $(1, 1)$ for this curve.

2. Perform a similar study for the equation $3e^x - e^y - x\cos y = 0$, b) $x^3 - 2x + 2y^3 + y^2 = 0$, in a neighbourhood of the point $(0, 0)$.

Preparatory exercices for integral calculus.
Let (the integration domain) $D := [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ be a closed rectangle and $f : D \to \mathbb{R}$ continuous. The integral of f over the set D, i.e., the expression $\int_D f dA$ can be calculated as iterated integrals, which means one of the formuli

$$\int\limits_D f dA = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_c^d f(x, y) dy \Big) dx \quad \text{or} \quad \int\limits_D f dA = \int\limits_c^d \Big(\int\limits_a^b f(x, y) dx \Big) dy.$$

For example in the inner integral of the the first formula, the variable x is considered as a constant, and the integration with respect to y produces a function depending on x. This function is then integrated in the outer integral.

3. Calculate $\int_D f dA$ for $D = [0,2] \times [2,4]$ and

$$\text{a)} \quad f(x,y) := 2x^2 - y^2 + 3xy, \qquad \text{b)} \quad f(x,y) := \cos(\pi x) - xe^{-y}.$$

4. An example of a more general integration domain: if $a < b$ and $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ is continuous, $\phi(x) \geq 0$, and

$$D := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \phi(x)\},$$

(draw D), then the formula turns into

$$\int\limits_D f dA = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_0^{\phi(x)} f(x,y) dy \Big) dx,$$

where the integrand $f : D \to \mathbb{R}$ is a given continuous function. Calculate this for $[a,b] = [0,5]$ and $\phi(x) = x^2$ and $f(x,y) = xy + 3y^2$.

5. Calculate $\int\limits_D f dA$ when D is a triangle with vertices at the points $(0,0)$, $(0,1)$ and $(1,1)$, and

$$\text{a)} \quad f(x,y) := xy^2, \qquad \text{b)} \quad f(x,y) := \frac{xy}{3 + y^4}.$$

Instruction. This is of the same form as Ex. 4.

6. By guessing, think about the geometric interpretation and possible definition (by a generalization of Riemann sums) of the integral concept considered above, when D is a rectangle. You do not need to present proofs.