VEKTORIANALYYSI / CALCULUS OF SEVERAL VARIABLES
LASKUHARJOITUS 5 / EXERCISE 5
SYKSY 2013 / AUTUMN 2013

1. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funktio

$$\text{a)}\quad f(x,y) := x^3 + y^3 + 3x^2 - 18y^2 + 81y + 5, \qquad \text{b)}\quad f(x,y) := e^{xy}.$$

Määrää f:n lokaalit ääriarvokohdat.

2. Samoin, kun

$$\text{a)}\quad f(x,y) := x^2 + y^2 + \frac{32}{xy},\ x \neq 0,\ y \neq 0, \qquad \text{b)}\quad f(x,y) := (x^2 + 2y^2)e^{1-x^2-y^2}.$$

3. Esitä esimerkkejä kahden muuttujan funktioista, jotka ovat $C^3(\mathbb{R}^2)$ ja joilla piste $\bar{a} = (1,1)$ on kriittinen piste, jossa Hessin neliömuoto Q on positiivisesti semidefiniitti, ja $\bar{a}$ on a) aito minimi b) minimi, joka ei ole aito c) piste, jossa ei ole ääriarvoa. (Esimerkkejä voi muodostaa vaikkapa kahden muuttujan polynomeista, jotka ovat enintään neljättä astetta. Voit aluksi ajatella, että tarkastelupiste on origo pisteen $\bar{a}$ sijasta.)

4. Mikä on funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(\bar{x}) := e^{x_1 x_2}$, suurin ja pienin arvo tason suljetussa kiekossa $\bar{B}(0,3)$?

5. Mikä on funktion $\varphi(x,y) := 1 - x^2 - y^2$ suurin ja pienin arvo joukossa

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}?$$

6. Lagrangen kertoimia voidaan käyttää myös avaruudessa $\mathbb{R}^n$, kun $n \geq 3$. Kerrointa koskeva yhtälö on samaa muotoa kuin tapauksessa $n = 2$. Esimerkiksi tapauksessa $n = 3$ sekä maksimoitava (tai minimoitava) funktio ja sidosehtofunktio ovat siis kolmen muuttujan funktioita, ja sidosehto kuvaa tyypillisesti jotain pintaa avaruudessa $\mathbb{R}^3$.
Etsi funktion $f(x,y,z) = 4x - 2y - 3z$ suurin ja pienin arvo joukossa

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 100\}.$$

****

1. Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be the funtion

$$\text{a)}\quad f(x,y) := x^3 + y^3 + 3x^2 - 18y^2 + 81y + 5, \qquad \text{b)}\quad f(x,y) := e^{xy}.$$

Find the local (= ”relative”) extrema of f.

2. The same for

$$\text{a)}\quad f(x,y) := x^2 + y^2 + \frac{32}{xy},\ x \neq 0,\ y \neq 0, \qquad \text{b)}\quad f(x,y) := (x^2 + 2y^2)e^{1-x^2-y^2}.$$

3. Give examples of functions of two varibles, which are $C^3(\mathbb{R}^2)$, such that the point $\bar{a} = (1,1)$ is a critical point at which the Hessian quadratic form Q is positive

semidefinite and $\bar{a}$ is a) a strict local minimum b) a local minimum which is not strict c) not an extremal point. (Examples can be constructed e.g. using two variable polynomials of at most fourth degree. You may start by thinking about the origin instead of the point $\bar{a}$. By a "strict" minimum we mean a point $\bar{x}$ such that $f(\bar{y}) > f(\bar{x})$ for $\bar{y} \neq \bar{x}$ in a neighbourhood of $\bar{x}$.)

4. Find the absolute maxima and minima of $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(\bar{x}) := e^{x_1 x_2}$, in the closed disc $\bar{B}(0,3)$ of the plane.

5. What are the largest and smallest values of the function $\varphi(x,y) := 1 - x^2 - y^2$ in the set

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x \geq 0, \; y \geq 0, \; x + y \leq 1\}?$$

6. Lagrange multipliers can also be used in the space $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. The corresponding equation for the coefficient is of the same form as in the case $n = 2$. For example, if $n = 3$, both the function under investigation and the constraint function are functions of three variables, and the constraint condition typically describes a surface in the space $\mathbb{R}^3$.
So, find the minimum and maximum values of the function $f(x,y,z) = 4x - 2y - 3z$ in the set

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + z^2 = 100\}.$$