

VEKTORIANALYYSI / CALCULUS OF SEVERAL VARIABLES
 LASKUHARJOITUS 4 / EXERCISE 4
 SYKSY 2013 / AUTUMN 2013

Käytämme korkeamman kertaluvun osittaisderivaatoille kirjan merkintätapojen lisäksi myös merkintää $\partial_{12} = \partial_1\partial_2$ ja $\partial_{112} = \partial_1^2\partial_2 = \partial_1\partial_1\partial_2$ jne.

1. Laske $\partial_2g, \partial_{21}g, \partial_{12}g, \partial_{213}g, \partial_{123}g$ ja $\partial_2^2\partial_3\partial_1g$, kun

$$g(\bar{x}) = \sin(x_1 - x_3^2)x_2, \quad \bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

2. Muodosta toisen asteen Taylorin kehitelmä funktioille $g(x, y) = e^{-2x+3y}$ pisteessä a) $(0, 0)$, b) $(1, 2)$. (Suoran derivoinnin lisäksi voit käyttää Taylor-kehittelmän yksikäsitteisyyttä.)

3. Samoin, muodosta toisen asteen Taylorin kehitelmä funktiolle f ,

$$f(x, y) = \frac{1+y}{1+x^2}$$

pisteessä $(0, 0)$.

4. Olkoon $D \subset \mathbf{R}^2$ avoin. Sanomme, että funktio $u \in C^2(D)$ on harmoninen joukossa D , jos

$$\partial_{11}u + \partial_{22}u = 0$$

kaikkialla joukossa D .

a) Onko funktio

$$u(x, y) := 2^{x+y} \quad \text{tai} \quad w(\bar{x}) = \log(|\bar{x} - (1, 1)|)$$

harmoninen jossain tason osajoukossa? $\log =$ luonnollinen logaritmi.

b) Määritä vakio $a \in \mathbb{R}$ siten, että funktio

$$v(\bar{x}) = x_1^4 - ax_1^2x_2^2 + x_2^4, \quad \bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

on harmoninen koko tasossa.

5. Määritä funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := x^3 - 4xy + 2y$$

kriittiset pisteet.

6. Todista väliarvolause avaruudessa \mathbb{R}^n : Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin, $f \in C^1(D)$, $x, y \in D$, ja jana

$$I := \{ty + (1-t)x \mid t \in [0, 1]\} \subset D.$$

Tällöin on olemassa sellainen $\xi \in I$, että

$$f(y) - f(x) = \nabla f(\xi) \cdot (y - x).$$

Neuvo. Tarkastele funktiota $\varphi(t) := f(ty + (1-t)x)$, missä $t \in [0, 1]$.

We use the notation $\partial_{12} = \partial_1\partial_2$ and $\partial_{112} = \partial_1^2\partial_2 = \partial_1\partial_1\partial_2$ etc. in the following.

2

1. Calculate $\partial_2 g$, $\partial_{21} g$, $\partial_{12} g$, $\partial_{213} g$, $\partial_{123} g$ and $\partial_2^2 \partial_3 \partial_1 g$ for

$$g(\bar{x}) = \sin(x_1 - x_3^2)x_2 \quad , \quad \bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

2. Write the Taylor expansion of the second degree for the function $g(x, y) = e^{-2x+3y}$ at the point a) $(0, 0)$, b) $(1, 2)$. (You may also use the uniqueness result of Taylor expansions.)

3. The same for the function f ,

$$f(x, y) = \frac{1+y}{1+x^2}$$

at the point $(0, 0)$.

4. Let $D \subset \mathbb{R}^2$ be open. We call a function $u \in C^2(D)$ harmonic in the set D , if

$$\partial_{11} u + \partial_{22} u = 0$$

everywhere in D .

a) Is the function

$$u(x, y) := 2^{x+y} \quad \text{tai} \quad w(\bar{x}) = \log(|\bar{x} - (1, 1)|)$$

harmonic in some subdomain of the plane? $\log =$ natural logarithm with base e .

b) Find the constant $a \in \mathbb{R}$ such that the function

$$v(\bar{x}) = x_1^4 - ax_1^2 x_2^2 + x_2^4 \quad , \quad \bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

becomes harmonic in the entire plane.

5. Find the critical points of the function $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := x^3 - 4xy + 2y.$$

6. Prove the mean value theorem in the space \mathbb{R}^n : Let $D \subset \mathbb{R}^n$ be open, $f \in C^1(D)$, $x, y \in D$, and define the line segment

$$I := \{ty + (1-t)x \mid t \in [0, 1]\} \subset D.$$

Then there exists a $\xi \in I$ such that

$$f(y) - f(x) = \nabla f(\xi) \cdot (y - x).$$

(You might consider the function $\varphi(t) := f(ty + (1-t)x)$, where $t \in [0, 1]$.)