VEKTORIANALYYSI / CALCULUS OF SEVERAL VARIABLES
LASKUHARJOITUS 3 / EXERCISE 3
SYKSY 2013 / AUTUMN 2013

1. Muodosta ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat suoraan yhdistetyn funktion lausekkeesta sekä ketjusääntöä käyttäen, kun $f = h \circ w$, sekä $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ja

a) $w(\bar{x}) = (x_1^2, x_1x_2)$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$, ja $h(x,y) = e^{x+y} + 2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
b) $w(x,y) = \big(xy^2, x^3\big)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ja $h(\bar{x}) = x_2 - x_1^2$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$.

2. Muodosta yhdistetty funktio $f \circ g$, kun

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) = x_1 + \sin(x_2 + x_3)$, ja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g(\bar{x}) = (e^{x_1+x_2}, x_3, x_2^2)$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = \big(1 + x^2 + y^2, 2, y^2 - x\big)$, ja $g : B(\bar{0},1) \to \mathbb{R}^2$, $g(\bar{x}) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3)$, missä $B(\bar{0},1)$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ avoin yksikkökuula.

3. Laske tehtävän 2.a) funktion $f \circ g$ ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat suoraan sekä ketjusääntöä käyttäen. Laske tehtävän 2.b) funktioiden f ja g derivaatat (kaikissa ko. funktioiden määrittelyjoukkojen pisteissä), sekä laske $(f \circ g)'(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$

4. Olkoon $g(x,y) = (yx, x - y^2)$ ja $f(x,y) = (y^3, \cos(\pi xy/2))$. Laske funktioiden $g \circ f$ ja $f \circ g$ derivaatta pisteessä $(1,1)$.

5. Mihin suuntaan funktio $f(\bar{x}) = 4x_1^2 - x_2^2 + 9x_3^2$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$, kasvaa nopeimmin pisteessä $(2,2,1)$? Laske myös f:n derivaatta suuntaan $(-1,1,-1)/\sqrt{3}$ tässä pisteessä.

6. Todista (vetoamatta kirjan Lauseeseen 2.8.3.) derivoimisjärjestyksen vaihdannaisuus $\partial_{12} g(\bar{x}) = \partial_{21} g(\bar{x})$, kun $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ on kahden muuttujan funktio

$$g(x,y) = \sum_{j=1}^{N} f_j(x) h_j(y)$$

missä $N \in \mathbb{N}$ sekä f_j ja h_j ovat kaksi kertaa jatkuvasti derivoituvia yhden muuttujan funktioita.

****

1. Calculate the partial derivatives of first order both by differentiating the expression of the composed function and also by using the chain rule, given $f = h \circ w$ with $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, and

a) $w(\bar{x}) = (x_1^2, x_1x_2)$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$, and $h(x,y) = e^{x+y} + 2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
b) $w(x,y) = \big(xy^2, x^3\big)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, and $h(\bar{x}) = x_2 - x_1^2$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$.

2. Write the composed function $f \circ g$, when

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) = x_1 + \sin(x_2 + x_3)$, and $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g(\bar{x}) = (e^{x_1+x_2}, x_3, x_2^2)$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = \big(1 + x^2 + y^2, 2, y^2 - x\big)$, and $g : B(\bar{0},1) \to \mathbb{R}^2$, $g(\bar{x}) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3)$, where $B(\bar{0},1)$ is the unit ball of the space $\mathbb{R}^3$.

3. Calculate the partial derivatives of first order both by direct differentiation and by the chain rule for the function $f \circ g$ of Exercise 2.a). In the Exercise 2.b), write the derivatives of the functions f and g (in all points of their domains of definitions), and also calculate $(f \circ g)'(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$.

4. Let $g(x, y) = (yx, x - y^2)$ and $f(x, y) = (y^3, \cos(\pi xy/2))$. Calculate the derivatives of the functions $g \circ f$ and $f \circ g$ at the point $(1, 1)$.

5. In which direction does the function $f(\bar{x}) = 4x_1^2 - x_2^2 + 9x_3^2$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$, have the strongest growth at the point $(2, 2, 1)$? Calculate the partial derivative of f to the direction $(-1, 1, -1)/\sqrt{3}$ at this point.

6. Without using Theorem 2.8.3 of the course book, prove the commutativity of partial differentiation $\partial_{12} g(\bar{x}) = \partial_{21} g(\bar{x})$, when $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ is the following function of two variables,

$$g(x, y) = \sum_{j=1}^{N} f_j(x) h_j(y)$$

where $N \in \mathbb{N}$ and f_j, h_j are two times continuously differentiable functions of one variable.