VEKTORIANALYYSI / CALCULUS OF SEVERAL VARIABLES
LASKUHARJOITUS 2 / EXERCISE 2
SYKSY 2013 / AUTUMN 2013

1. Onko funktiolla $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\} \to \mathbb{R}$,

$$\text{a)}\ \ f(x,y) = \frac{x^2 - y}{x^2 + y^2}\ ,\quad \text{b)}\ \ f(x,y) = \frac{x - y}{|x| + |y|}\ ,\quad \text{c)}\ \ f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{|x| + |y|}$$

raja-arvoa origossa?

2. Missä tason osajoukossa on funktio f,

$$f(x_1, x_2) = \frac{\sin(x_1 - 1) + x_2}{x_1 - 1}$$

määritelty? Onko funktiolla raja-arvoa pisteessä $(1, 0)$?

3. Laske kaikki ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ($\partial_1 f(\bar{x})$, $\partial_2 f(\bar{x})$ jne.), kun f on

a) $f(\bar{x}) = x_1^2 e^{x_3} - x_3 x_2 + 2x_1$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$,

b) $f(\bar{x}) = 4x_1^{x_2}$, missä $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$, $x_1 > 0$,

c) $f(\bar{x}) = 4x_1^{x_2 x_3}$, missä $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$, $x_1 > 0$,

d) tehtävän 2 funktio määrittelyalueessaan.

4. Anna esimerkki funktiosta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, jolla $\partial_2 f(\bar{x}) = 0$ kaikilla $\bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, mutta joka ei ole jatkuva.

5. Laske funktion f,

$$\text{a)}\ \ f(\bar{x}) = \frac{x_1^2 - x_2}{\sin x_3}\ ,\quad \bar{x} \in \mathbb{R}^3,\ x_3 \neq \pi n, n \in \mathbb{Z},\quad \text{b)}\ \ f(\bar{x}) = e^{x_1^2 - x_2^2}\ ,\quad \bar{x} \in \mathbb{R}^2$$

gradientti. Kohdassa b), piirrä funktion f kuvaaja, muodosta f:n kuvaajaa pisteessä $(0, 1, f(0, 1))$ approksimoivan tangettitason yhtälö ja piirrä tämä tangenttitaso.

6. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differentioituva koko tasossa, ja oletetaan että $\nabla f(\bar{x}) = 0$ kaikilla $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$. Osoita, että f on vakiofunktio.

****

1. Does the function $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\} \to \mathbb{R}$,

$$\text{a)}\ \ f(x,y) = \frac{x^2 - y}{x^2 + y^2}\ ,\quad \text{b)}\ \ f(x,y) = \frac{x - y}{|x| + |y|}\ ,\quad \text{c)}\ \ f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{|x| + |y|}$$

have a limit value at the origin?

2. What is the domain of definition of the function

$$f(x_1, x_2) = \frac{\sin(x_1 - 1) + x_2}{x_1 - 1}\quad ?$$

Does f have a limit value at the point $(1, 0)$?

3. Calculate all the first order partial derivatives ($\partial_1 f(\bar{x})$, $\partial_2 f(\bar{x})$ etc.) for f,
a) $f(\bar{x}) = x_1^2 e^{x_3} - x_3 x_2 + 2x_1$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$,
b) $f(\bar{x}) = 4x_1^{x_2}$, where $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$, $x_1 > 0$,
c) $f(\bar{x}) = 4x_1^{x_2 x_3}$, where $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$, $x_1 > 0$,
d) the function of Problem 2 in its domain of definition.

4. Find a function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, which has the property $\partial_2 f(\bar{x}) = 0$ for all $\bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, but which is not continuous.

5. Calculate the gradient ∇f of the function f,

$$\text{a)}\quad f(\bar{x}) = \frac{x_1^2 - x_2}{\sin x_3}\ , \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^3,\ x_3 \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}, \quad \text{b)}\quad f(\bar{x}) = e^{x_1^2 - x_2^2}\ , \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^2$$

Concerning the Item b), draw the graph of f, formulate the equation describing the tangent plane of f which approximates the graph of f at the point $(0, 1, f(0, 1))$, and, finally, sketch (draw) the tangent plane.

6. Assume that the function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is differentiable in the entire plane and also that $\nabla f(\bar{x}) = 0$ for all $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$. Prove that f is a constant function.