VEKTORIANALYYSI
LASKUHARJOITUS 11
SYKSY 2013

1. a) Olkoon $S \subset \mathbb{R}^3$ pinta

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = 5\sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ 0 < x^2 + y^2 < 4\}.$$

Esitä pinnan S normaalivektori. (Voit esimerkiksi ajatella pintaa S parametrisoituna pintana sopivan funktion $r : D \to \mathbb{R}^3$ avulla ja muodostaa lausekkeen $\partial_1 r \times \partial_2 r$.)
b) Samoin, kun S on pinta

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid (x_1 - 2)^2 + x_2^2 = 4\}.$$

(Tässä on parempi tehdä alkeellinen tarkastelu.)

2. Laske vektorikentän $F(x, y, z) := (e^{y+z}, e^{-y-z}, xe^y)$ vuo (ulospäin) kuution $I^3 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$ reunan läpi. (Gauss)

3. Kuten tehtävä 2, mutta $F(x, y, z) := (x^3, 3yz^2 + e^x, 3y^2z + x^2)$ ja kuution reuna korvataan pallopinnalla

$$S := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\},$$

missä $R > 0$ on vakio.

4. Laske Stokesin lauseen avulla integraali

$$\int_\gamma F \cdot d\bar{s},$$

kun $F(x_1, x_2, x_3) := (2x_2, 3x_3, x_1)$ ja γ on suorakulmion reuna ja suorakulmion kärkipisteet ovat $(0, 0, 0)$, $(0, 5, 0)$, $(2, 0, 2)$ ja $(2, 5, 2)$.

5. Laske pinnan

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\ ,\ |(x, y)| \le 1\}$$

ala. (Voit esimerkiksi tulkita tämän funktion kuvaajana.)

6. Laske Stokesin lauseen avulla

$$\int_\gamma y dx - x dy + z^2 dz,$$

kun γ on sylinterien $z = y^2$ ja $x^2 + y^2 = 4$ leikkaus suunnistettuna vastapäivään, kun katsotaan kaukaa positiivisen z–akselin puolelta.

****

1. a) Let $S \subset \mathbb{R}^3$ be the surface

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = 5\sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ 0 < x^2 + y^2 < 4\}.$$

Write the normal vector of S. (You can for example think of S as a surface parametrized with the help of a suitable function $r : D \to \mathbb{R}^3$ and form the expression $\partial_1 r \times \partial_2 r$.)

b) The same for the surface S,

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid (x_1 - 2)^2 + x_2^2 = 4\}.$$

(Elementary consideration.)

2. Calculate the outward flux of the vector field $F(x, y, z) := (e^{y+z}, e^{-y-z}, xe^y)$ through the surface of the cube $I^3 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$. (Gauss)

3. As Exercise 2, but $F(x, y, z) := (x^3, 3yz^2 + e^x, 3y^2z + x^2)$ and the surface is the sphere

$$S := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\},$$

where $R > 0$ is a constant.

4. Use the Stokes theorem to calculate

$$\int_\gamma F \cdot d\bar{s},$$

when $F(x_1, x_2, x_3) := (2x_2, 3x_3, x_1)$ and γ is the edge of the rectangle with vertices at $(0, 0, 0)$, $(0, 5, 0)$, $(2, 0, 2)$ ja $(2, 5, 2)$.

5. Calculate the area to the surface

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = x^2 + y^2 \ , \ |(x, y)| \leq 1\}.$$

(This can be intepreted as a graph of a function.)

6. Use the Stokes theorem to calculate

$$\int_\gamma y dx - x dy + z^2 dz,$$

when γ is the intersection of the cylinders $z = y^2$ and $x^2 + y^2 = 4$ with positive orientation, when seen from far positive z–axis.