VEKTORIANALYYSI
LASKUHARJOITUS 10
SYKSY 2013

1. Käyttäen Greenin kaavaa tasossa, laske seuraavat käyräintegraalit:

$$a) \oint_{\partial A} (y^2 dx + x^2 dy) \ , \quad b) \oint_{\partial A} (3y dx + 2x dy).$$

Kohdassa a), joukko A on kolmio, jota rajoittavat suorat $x = 0$, $x + y = 1$, $y = 0$. Kohdassa b) joukon A määräävät ehdot $0 < x < \pi$, $0 < y < \sin x$.

2. Tutki seuraavien vektorikenttien $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ eksaktiutta, ja mikäli ne ovat eksakteja, määritä niiden jokin potentiaali: a) $F(x, y) := (\sin x + y^2, e^y + 2xy)$, b) $F(x, y) := (3y^2 - 4xy, -2x^2 + 6xy)$, c) $F(x, y) := (y + 2xy^2, 5x)$

3. Laske

$$\oint_{\partial D} \left(e^{y^2}, 2xy\, e^{y^2}\right) \cdot d\bar{s} \ ,$$

kun $D \subset \mathbb{R}^2$ on origokeskinen, 100-säteinen kiekko.

4. Oletetaan, että vektorikenttä $F = (F_1, F_2) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, on eksakti. Ovatko seuraavat kentät aina eksakteja ($a, b, c \in \mathbb{R}$ vakioita, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ muuttuja) :

$$(F_2, -F_1) \ , (aF_1 + b, aF_2 + c) \ , \ (F_1 + x^2, F_2 + y^2)?$$

5. Osoita, että tason avoin, konveksi osajoukko on yhdesti yhtenäinen. Voit esimerkiksi olettaa, että $\bar{0} \in A$. (Vrt. kurssin täydentävä materiaali.)

6. Osoita, että vektorikenttä $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$,

$$F(x, y, z) := (e^x \sin y + y, e^x \cos y + x - z, -y)$$

on eksakti, ja määrää jokin sen potentiaali. (Vrt. kurssin täydentävä materiaali.)

****

1. Calculate the following path integrals using the Green formula in the plane:

$$a) \oint_{\partial A} (y^2 dx + x^2 dy) \ , \quad b) \oint_{\partial A} (3y dx + 2x dy).$$

In the item a), the domain A is a triangle bounded by the lines $x = 0$, $x + y = 1$, $y = 0$. In the item b) the domain A is defined by the conditions $0 < x < \pi$, $0 < y < \sin x$.

2. Find out, if the following vector fields $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ are exact, and in the case they are, determine their potential functions: a) $F(x, y) := (\sin x + y^2, e^y + 2xy)$, b) $F(x, y) := (3y^2 - 4xy, -2x^2 + 6xy)$, c) $F(x, y) := (y + 2xy^2, 5x)$

3. Calculate

$$\oint_{\partial D} \left(e^{y^2}, 2xy\, e^{y^2}\right) \cdot d\bar{s} \ ,$$

when $D \subset \mathbb{R}^2$ is a disc with center at the origin and radius 100.

4. Assume that the vector field $F = (F_1, F_2) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ is exact. Are the following fields always exact ($a, b, c \in \mathbb{R}$ constants, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ variable) :

$$(F_2, -F_1)\ , (aF_1 + b, aF_2 + c)\ ,\ (F_1 + x^2, F_2 + y^2)?$$

5. Show that any open, convex subset of the plane is simply connected. You can for example assume that $\bar{0} \in A$ (cf. complementary course material on the web page, in Finnish only, sorry).

6. Prove that the vector field $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$,

$$F(x, y, z) := (e^x \sin y + y, e^x \cos y + x - z, -y)$$

is exact, and find its potential (cf. complementary course material).