Vektorianalyysi, 1. kurssikoe 14.10.2013
Malliratkaisut (Mika Koskenoja)

(1.) Nyt $(x_i, y_i) = (0, \frac{1}{i}) \longrightarrow (0,0)$, $i \to \infty$,

ja

$$g(x_i, y_i) = g(0, \tfrac{1}{i}) = \frac{4 \cdot 0^3 + (\frac{1}{i})^2}{0^2 + (\frac{1}{i})^2} = \frac{\frac{1}{i^2}}{\frac{1}{i^2}}$$

$$= 1 \longrightarrow 1, \quad i \to \infty, \qquad (+2p)$$

mutta $(x_j, y_j) = (\frac{1}{j}, \frac{1}{j}) \longrightarrow (0,0)$, $j \to \infty$,

ja

$$g(x_j, y_j) = g(\tfrac{1}{j}, \tfrac{1}{j}) = \frac{4 \cdot (\frac{1}{j})^3 + (\frac{1}{j})^2}{(\frac{1}{j})^2 + (\frac{1}{j})^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{j^2}(\frac{4}{j} + 1)}{\frac{2}{j^2}} = \frac{\frac{4}{j} + 1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}, \quad j \to \infty. \qquad (+2p)$$

Näin ollen g:llä ei ole raja-arvoa pisteessä (0,0), joten g ei voi olla jatkuva pisteessä (0,0). Siis arvoa g(0,0) ei ole mahdollista määritellä niin, että g olisi jatkuva koko tasossa. (+2p)

(2.) Nyt $f = h\circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ on

$$f(x,y,z) = h(g(x,y,z)) = h(x+z-y^2, y^2)$$
$$= e^{-y^2} - \sin(\pi(x+z-y^2+y^2)/2)$$
$$= e^{-y^2} - \sin\left(\tfrac{\pi}{2}x + \tfrac{\pi}{2}z\right). \qquad (+1p)$$

Saadaan osittaisderivaatat

$$\partial_1 f(x,y,z) = -\tfrac{\pi}{2}\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x + \tfrac{\pi}{2}z\right), \qquad (+1p)$$
$$\partial_2 f(x,y,z) = -2ye^{-y^2}, \qquad (+1p)$$
$$\partial_3 f(x,y,z) = -\tfrac{\pi}{2}\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x + \tfrac{\pi}{2}z\right). \qquad (+1p)$$

Koska $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ja

$$\nabla f(1,2,0) = \left(-\tfrac{\pi}{2}\cos\tfrac{\pi}{2}, -4e^{-4}, -\tfrac{\pi}{2}\cos\tfrac{\pi}{2}\right)$$
$$= (0, -4e^{-4}, 0) \neq (0,0,0),$$

niin $(1,2,0)$ ei ole funktion f kriittinen piste ja sillä ei näin ollen ole lokaalia maksimia pisteessä $(1,2,0)$. (+2p)

(3.) Funktion f kriittiset pisteet ovat yhtälön $\nabla f(x,y) = (-6xy, 3-3y^2-3x^2) = (0,0)$ ratkaisut. Nyt $-6xy = 0$, jos ja vain jos $x=0$ tai $y=0$. Tarkastellaan nämä kaksi tapausta erikseen:

1° $x=0$: $3-3y^2-3x^2 = 3(1-y^2) = 0$
$\iff y^2 = 1 \iff y=-1$ tai $y=1$.

2° $y=0$: $3-3y^2-3x^2 = 3(1-x^2) = 0$
$\iff x^2 = 1 \iff x=-1$ tai $x=1$.

Kriittiset pisteet ovat siis $(0,-1)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ ja $(1,0)$. (+2p)

Tutkitaan sitten yksi piste kerrallaan, ovatko nämä lokaaleja ääriarvopisteitä. Havaitaan ensin, että $f \in C^3(\mathbb{R}^3)$. Voidaan siis tutkia toisen asteen neliömuodon $Q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ käyttäytymistä:

Nyt $Q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$, missä

$a = \partial_{11} f(x,y) = -6y$,

$b = \partial_{12} f(x,y) = \partial_{21} f(x,y) = -6x,$

$c = \partial_{22} f(x,y) = -6y.$

$\underline{(0,-1)}$: $a = -6\cdot(-1) = 6 > 0$ ja

$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = -6\cdot(-1)\cdot(-6)(-1) - (-6\cdot 0)^2 = 36 > 0,$

joten Q on positiivisesti definiitti ja piste $(0,-1)$ on lokaali minimipiste. (+1p)

$\underline{(0,1)}$: $a = -6\cdot 1 = -6 < 0$ ja

$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = -6\cdot 1\cdot(-6)\cdot 1 - (-6\cdot 0)^2 = 36 > 0,$

joten Q on negatiivisesti definiitti ja piste $(0,1)$ on lokaali maksimipiste. (+1p)

$\underline{(-1,0)}$: $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = -6\cdot 0\cdot(-6)\cdot 0 - (-6\cdot(-1))^2 = -36 < 0,$

joten Q on indefiniitti ja $(-1,0)$ ei ole ääriarvopiste. (+1p)

$\underline{(1,0)}$: $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = -6\cdot 0\cdot(-6)\cdot 0 - (-6\cdot 1)^2 = -36 < 0,$

joten Q on indefiniitti ja $(1,0)$ ei ole ääriarvopiste. (+1p)

(4.) Pisteen $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ etäisyys origosta on $\sqrt{x^2+y^2}$, mutta neliöjuuren ominaisuuksien takia voimme tarkastella funktiota $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2+y^2$, etsiessämme pisteitä, joiden etäisyys origosta on pienin ja suurin. Nyt $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$. Koska f on jatkuva ja joukko

$$A_0=\{(x,y): x^2+xy+y^2=1\}$$

on kompakti, niin $f|A_0$ saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa joukossa A_0. $(+1p)$

Määritellään $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $g(x,y)= x^2+xy+y^2-1$, jolloin $g\in C^1(\mathbb{R}^2)$ ja $A_0=\{(x,y): g(x,y)=0\}$. Nyt

$$\nabla g(x,y)=(2x+y,\ x+2y)=(0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ x+2y=0\end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)\notin A_0. \ (+1p)$$

Siis f:n ääriarvot joukossa A_0

saadaan Lagrangen kertoimien menetelmällä pisteissä, joissa jollakin $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x, 2y) = \lambda(2x+y, x+2y) \\ x^2+xy+y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \lambda(2x+y) \\ 2y = \lambda(x+2y) \\ x^2+xy+y^2 = 1 \end{cases} \qquad (+1p)$$

Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan $\lambda = \frac{2x}{2x+y}$, ja sijoittamalla tämä toiseen yhtälöön saadaan

$$2y = \frac{2x}{2x+y}(x+2y) \Leftrightarrow 2y(2x+y) = 2x(x+2y)$$
$$\Leftrightarrow 4xy + 2y^2 = 2x^2 + 4xy \Leftrightarrow y^2 = x^2 \Leftrightarrow y = \pm x.$$

Nyt viimeisestä yhtälöstä saadaan tutkimalla kahta eri tapausta:

<u>$y=-x$:</u> $x^2 - x^2 + x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Siis ratkaisut ovat $(-1,1)$ ja $(1,-1)$.

(+1p)

$\underline{y = x}$: $x^2 + x^2 + x^2 = 1 \iff 3x^2 = 1$
$\iff x^2 = \frac{1}{3} \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.
Siis ratkaisut ovat $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ja
$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. (+1p)

Sijoittamalla saadaan

$f(1,-1) = f(-1,1) = 1 + 1 = 2$,

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$,

joten pisteiden $(1,-1)$ ja $(-1,1)$ etäisyys origosta on suurin ja pisteiden $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ja $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ pienin. (+1p).