Määr. 6.14. Jos X on topologinen avaruus ja $f: X \to \mathbb{R}$ jatkuva, sanomme, että f häviää äärettömyydessä, jos
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ kompakti } K \subset X \text{ s.e. } |f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X \setminus K.$$
Merk.
$$D(X) = \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva ja häviää äärettömyydessä} \}.$$

Kun määritellään $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$
$$(cf_1)(x) = c \cdot f_1(x) \qquad , f_1, f_2 \in D(X), \; c \in \mathbb{R}, \; x \in X,$$
ja normi $\|f\| = \max \{ |f(x)| \mid x \in X \}$,
$D(X)$ on Banachin avaruus, eli täydellinen normiavaruus (HT).
Olk. G lok. komp. ryhmä ja X Hausd. G-avaruus.
Määritellään toiminta (yksityiskohdat HT)
$$G \times D(X) \to D(X) \qquad (*)$$
kaavalla $(gf)(x) = f(g^{-1}x)$, $g \in G, f \in D(X), x \in X$.

Lause 6.15. Yllä määritelty toiminta on jatkuva.
(Huom. y.o. kaavan määrittelemä toiminta ei välttämättä ole jatkuva avaruudessa $Raj(X, \mathbb{R}) \supset D(X)$.)

Tod. Olk. $f \in D(X)$. Os. jatkuvuus pisteessä $(e, f) \in G \times D(X)$ (yleinen tapaus tehdään vastaavasti, mutta merkinnät tulevat monimutkaisemmiksi).
Olk. $\varepsilon > 0$.
On siis löydettävä e:n ymp. U G:ssä ja f:n ymp. U' $D(X)$:ssä s.e. $\|gh - f\| < \varepsilon \quad \forall g \in U, h \in U'$
eli $\max \{ |(gh)(x) - f(x)| \mid x \in X \} < \varepsilon$
eli $\max \{ |h(g^{-1}x) - f(x)| \mid x \in X \} < \varepsilon$
eli $|h(g^{-1}x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall g \in U, h \in U', x \in X.$

Δ-ey:n nojalla
$$|h(g^{-1}x) - f(x)| \le |h(g^{-1}x) - f(g^{-1}x)| + |f(g^{-1}x) - f(x)|.$$

Val. aluksi e:n ymp. V s.e. $\overline{V}$ on kompakti ja X:n kompakti osajoukko K s.e. $|f(x)| < \varepsilon/4 \quad \forall x \in X \setminus K$.

Jokaisella $x \in \bar{X} \setminus \bar{V}K$ ja $g \in \bar{V}$ on $g^{-1}x \in \bar{X} \setminus K$
($g^{-1}x \in K \Rightarrow x = gg^{-1}x \in \bar{V}K$), joten

$$|f(g^{-1}x) - f(x)| \le |f(g^{-1}x)| + |f(x)| < \varepsilon/2 .$$

Koska $\bar{V}K$ on kompakti, löydetään e:n ymp. W s.e.

$$|f(g^{-1}x) - f(x)| < \varepsilon/2 \quad \forall g \in W,\ x \in \bar{V}K . \qquad (*)$$

Jos $g \in V \cap W$, niin $|f(g^{-1}x) - f(x)| < \varepsilon/2 \quad \forall x \in \bar{X}$.

Jos nyt $g \in V \cap W$ ja $h \in B(f, \varepsilon/2)$, on

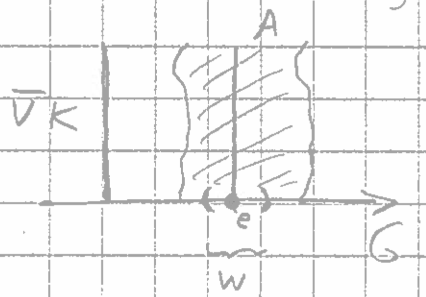
$$|h(g^{-1}x) - f(x)| \le |h(g^{-1}x) - f(g^{-1}x)| + |f(g^{-1}x) - f(x)|$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon .$$

□

Lisäys välivaiheeseen (*):

Tark. jatkuvaa funktiota



$$\varphi : G \times \bar{V}K \to \mathbb{R}$$
$$(g, x) \mapsto f(g^{-1}x) - f(x)$$

Koska $\varphi(e, x) = 0 \ \forall x$, on joukko

$$A = \varphi^{-1}\,]-\varepsilon/2, \varepsilon/2[$$

joukon $\{e\} \times \bar{V}K$ ympäristö.
Koska $\bar{V}K$ on kompakti, $\exists$ e:n ymp. W s.e. $W \times \bar{V}K \subset A$, jolloin siis

$$-\varepsilon/2 < \varphi(g, x) = f(g^{-1}x) - f(x) < \varepsilon/2$$
$$\forall g \in W,\ x \in \bar{V}K .$$

Huom. 6.16 Toiminta (*) ei toteuta edes Cartanin ehtoa, jos G on epäkompakti. Vakiofunktio $\underline{0}$ on nimittäin toiminnan kiintopiste (eli $g\underline{0} = \underline{0} \ \forall g$), joten $G(U|U) = G$ jokaisella $\underline{0}$:n ympäristöllä U.

Lause 6.17. Toiminnan rajoittuma
$$G \times (D(X) \setminus \{0\}) \to D(X) \setminus \{0\}$$
toteuttaa Palais'n ehdon.

Tod. Olk. $f, h \in D(X) \setminus \{0\}$ ja olk. $\delta = \frac{\|f\|}{2} > 0$.
Val. X:n kompakti osajoukko K s.e. $|h(x)| < \delta/2 \quad \forall x \in X \setminus K$
ja val. $x_0 \in X$ s.e. $|f(x_0)| = \|f\| = 2\delta$.
Os. että
$$G(B(f,\delta) \mid B(h, \delta/2)) \subset G(\{x_0\} \mid K),$$ joka on kompakti.
Jos $f' \in B(f,\delta)$ ja $h' \in B(h, \delta/2)$ ja $f' = gh'$ jollakin $g \in G$,
niin
$$|h'(g^{-1}x_0)| = |f'(x_0)| > \delta.$$
Siis
$$|h(g^{-1}x_0)| > \delta/2,$$ joten $g^{-1}x_0 \in K$, joten $g \in G(\{x_0\} \mid K)$.

$\square$

Metriselle avaruudelle (X, d) tulemme määrittelemään upotuksen
$$i : X \to D(X)$$
kaavalla
$$\cancel{i(x)(y)} = \begin{cases} 1 - d(x,y), & \text{jos } 0 \le d(x,y) \le 1 \\ 0, & \text{jos } d(x,y) \ge 1. \end{cases}$$

Ongelma: jos X on epäkompakti ja esim. $d(x,y) < \frac{1}{2} \; \forall x,y$, niin $i(x) \notin D(X)$.
Jos metriikalla on esim. ominaisuus:
jollakin kiinteällä $r > 0$ on $\overline{B}(x,r)$ kompakti $\forall x$,
~~tätä~~ ongelmaa ei tule.
Osoitamme myöhemmin:

Lause 6.18. Oletetaan, että X on vahva G-avaruus (G lok. kompakti), X/G on parakompakti ja ol. että X:llä on metriikka d, jolla on ominaisuus:
$$\forall r > 0 \; \forall x \in X : \underbrace{\overline{B}_d(x,r)}_{= \{y \in X \mid d(x,y) \le r\}} \text{ on kompakti.} \qquad (**)$$

Tällöin on olemassa X:n G-invariantti metriikka $\hat{d}$ (ekvivalentti d:n kanssa), jolle
$$\overline{B}_{\hat{d}}(x,1) \text{ on kompakti } \forall x \in X. \qquad (***)$$

Huom. 6.19. Jos X on N_2 topologinen monisto, niin X:llä $\exists$ metriikka d, jolla on ominaisuus $(**)$:
Void. os., että X voidaan upottaa avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljetuksi osajoukoksi, jolloin

$$X\text{:n sulj. kuula} = X \cap \mathbb{R}^n\text{:n sulj. kuula},$$

joka on suljettu ja rajoitettu $\mathbb{R}^n$:ssä, eli kompakti.

Rata-avaruus X/G on parakompakti Lauseen 6.13 nojalla.

9.12.13 $\longrightarrow$

Teoreema 6.20. Olk. G lokaalisti kompakti ja X vahva G-avaruus, jolla on G-invariantti metriikka $\hat{d}$ s.e. $\bar{B}_{\hat{d}}(x,1)$ on kompakti $\forall x \in X$.
Tällöin

$$i : X \to D(X)$$

$$i(x)(y) = \begin{cases} 1 - \hat{d}(x,y), & \text{jos } 0 \le \hat{d}(x,y) \le 1 \\ 0, & \text{jos } \hat{d}(x,y) \ge 1 \end{cases}$$

on G-ekvivariantti upotus ja $i(X) \in D(X)$.

Tod. Koska jokaiselle $x \in X$ funktio $i(x)$ häviää kompaktin joukon $\bar{B}(x,1)$ ulkopuolella, on $i(x) \in D(X)$ $\forall x \in X$.
i on G-ekvivariantti, koska $\hat{d}$ on G-invariantti:

$$i(gx)(y) = \begin{cases} 1 - \hat{d}(gx,y), & 0 \le \hat{d}(gx,y) \le 1 \\ 0, & d(gx,y) \ge 1. \end{cases}$$

$$g(i(x))(y) = \begin{cases} 1 - \hat{d}(x,g^{-1}y), & 0 \le \hat{d}(x,g^{-1}y) \le 1 \\ 0, & \hat{d}(x,g^{-1}y) \ge 1. \end{cases}$$

Nämä ovat samat, koska $\hat{d}(gx,y) = \hat{d}(g^{-1}(gx), g^{-1}y) = \hat{d}(x,g^{-1}y)$.

Ei ole vaikea tarkistaa että

$$\| i(x) - i(y) \| \le d(x,y) \quad \forall x,y \in X. \quad (\text{HT})$$

$$\text{''} \max\{ |i(x)(z) - i(y)(z)| \mid z \in X \}$$

Tästä seuraa, että i on jatkuva.

Selvästi i on injektio, koska jos $x \neq y$, niin

$$i(x)(x) = 1 \quad \text{ja} \quad i(y)(x) = 1 - \hat{d}(y,x) \neq 1,$$

eli $i(x) \neq i(y)$.

Käänteisfunktion $i^{-1} : i(X) \to X$ jatkuvuuden osoittamiseksi tehdään kaksi havaintoa:

Jos $d(x,y) \le 1$, niin

$$\| i(x) - i(y) \| \ge | i(x)(x) - i(y)(x) |$$
$$= | 1 - (1 - \hat{d}(y,x)) | = \hat{d}(x,y), \quad (1)$$

joten jos $\hat{d}(x,y) \le 1$, niin

$$\| i(x) - i(y) \| = \hat{d}(x,y) \;. \quad (2)$$

Lisäksi jos $\hat{d}(x,y) > 1$, niin

$$\| i(x) - i(y) \| \ge | i(x)(x) - i(y)(x) | = 1 \;. \quad (3)$$

i^{-1} jatkuva;

olk. $0 < \varepsilon < 1$. (Val. $\delta = \varepsilon$)

Jos $\| i(x) - i(y) \| < \varepsilon < 1$, niin $(3) \Rightarrow \hat{d}(x,y) \le 1$

ja

$$(2) \Rightarrow \hat{d}(x,y) = \| i(x) - i(y) \| < \varepsilon \;.$$

Lopuksi os., että $i(\bar{X}) \in D(\bar{X})$:

Olk. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jono joukossa $i(\bar{X})$, $f_n \to f \in D(\bar{X})$.

V. $f \in i(\bar{X})$.

T. Val. $x_n \in \bar{X}$ s.e. $f_n = i(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Olk. $N \in \mathbb{N}$ s.e. $\| f_n - f_m \| < 1/2 \quad \forall n,m > N$.

Tällöin $(3) \Rightarrow \hat{d}(x_n, x_m) \le 1$ ja $(2) \Rightarrow$

$$d(x_n, x_m) = \| f_n - f_m \| \quad \forall n,m > N .$$

Siis jono (x_n) on Cauchy-jono $\bar{X}$:ssä.

Void. os., että $\bar{X}$:n metriikka on täydellinen, koska $\bar{B}(x,1)$ on kompakti $\forall x \in \bar{X}$, [Dugundji, Th. $\overline{\text{XIV}}$. 2.3], joten $x_n \to x \in \bar{X}$.

Nyt i:n jatkuvuuden nojalla $i(x) = f$, joten $f \in i(\bar{X})$. □

Lopuksi todistetaan Lause 6.18.:

Valitaan aluksi e:n symmetrinen ympäristö K, s.e. $\overline{K}$ on kompakti, ja jatkuva $f: G \to [0,1]$ s.e. $f(e) = 1$ ja $f|G \setminus \overline{K} \equiv 0$
(jokainen top. ryhmä on n.s. täysin säännöllinen avaruus, kts. esim. [Pontryagin: Top. groups, 2nd Ed., Th. 10, s. 105].
Olkoon $\int_G \cdot \, dg$ oikealta-invariantti Haarin integraali ryhmälle G.
Koska integraali on vain vakiokerrointa vaille yksikäsitteinen, void. ol., että

$$\int_G f \, dg > 1 . \qquad (\text{Huom! } f \text{ kompaktikantajainen})$$

Teoreeman 6.10 nojalla toiminnalle on olemassa avoin perusjoukko F.
Tällöin myös KF ja $\overline{KF}$ ovat perusjoukkoja ja Teoreeman 6.11 nojalla $\exists$ avoin perusjoukko B s.e. $\overline{KF} \subset B$.

Jokaisella $x \in \overline{KF}$ val. ympäristö $U_x \subset B$. Tällöin joukot

$$\{U_x\}_{x \in \overline{KF}}, \quad X \setminus \overline{KF}$$

ovat X:n avoin peite, valitaan sille avoin lok. äärellinen tihennys $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$. ($X$ metr. $\Rightarrow$ X parakomp.)
Teoreeman [Dugundji: VII 6.1] nojalla $\exists$ X:n avoin peite $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ s.e.

$$\overline{W_\alpha} \subset V_\alpha \quad \forall \alpha \in A .$$

Void. ol. $W_\alpha \neq \emptyset$ $\forall \alpha$.

Jokaisella $\alpha \in A$ valitaan jatkuva

$$\varphi_\alpha : X \to [0,1]$$

$$\text{s.e.} \quad \varphi_\alpha | \overline{W_\alpha} \equiv 1 \quad \text{ja} \quad \varphi_\alpha | (X \setminus V_\alpha) \equiv 0 .$$

Sitten määr.

$$d'(x,y) = d(x,y) + \sum_{\alpha \in A} | \varphi_\alpha(x) - \varphi_\alpha(y) | .$$

Void. os., että d' on X:n metriikka, joka on ekvivalentti alkup. metriikan d kanssa.
Huom. ominaisuus (**) $\overline{B}_d(x,r)$ kompakti $\forall r \; \forall x$ on voimassa myös metriikalle d', koska $d'(x,y) \geq d(x,y)$ $\forall x,y$.

Tärkeä havainto: jos $x \in \overline{KF}$ ja $y \in Y \setminus B$, niin $\exists$ $\alpha \in A$ s.e. $x \in W_\alpha \subset V_\alpha \subset B$. Siis $\varphi_\alpha(x) = 1$ ja $\varphi_\alpha(y) = 0$, joten

$$d'(x,y) > 1 . \qquad (1)$$

Seuraava G-invariantin metriikan konstruktio löytyy teoksesta [J.L. Koszul: Lectures on groups of transformations, 1965]:
Määritellään jokaisella $x \in \bar{X}$

$$r(x) = d'(x, \bar{X} \setminus B),$$

$$h(x,y) = \min\{d'(x,y), r(x)+r(y)\} \quad , x,y \in \bar{X}$$

ja

$$D(x,y) = \int_G h(gx,gy)\, dg.$$

Void. os., että D on G-inv. metriikka, joka indusoi $\bar{X}$:n topologian.
Huom. funktiota r tarvittiin, jotta integroitavat funktiot olisivat kompaktikantajaisia:
olk. $x,y \in \bar{X}$; U_x, U_y ympäristöt s.e. $\overline{G(B|U_x)}$, $\overline{G(B|U_y)}$ komp.
Jos $gx \notin B$ ja $gy \notin B$, on $r(gx)=r(gy)=0$ ja siis $h(gx,gy)=0$. Siis jos $h(gx,gy)>0$, on $gx \in B$ tai $gy \in B$, joten $g \in G(B|U_x) \cup G(B|U_y)$.
Tästä seuraa, että (kun ajatellaan $h: G \to \mathbb{R}$, x,y kiinteitä)

$$spt(h) \subset \overline{G(B|U_x)} \cup \overline{G(B|U_y)}, \text{ joka on kompakti.}$$

Huomataan, että $r(x) \geq 1 \quad \forall x \in KF$ (seuraa havainnosta (1)).

Lopuksi os., että $\bar{B}_D(x,1)$ on kompakti $\forall x \in \bar{X}$.
Olk. $x \in \bar{X}$.
Koska metriikka D on G-invariantti, on $\bar{B}_D(gx,1) = g\bar{B}_D(x,1)$ $\forall g \in G$, joten void. ol., että $x \in F$. (F perusjoukko $\Rightarrow GF = \bar{X}$).
Merk.

$$C = \bigcup_{g \in K} \bar{B}_{d'}(gx,1).$$

Koska K on kompakti, niin $\exists \max\{d'(x,gx) \mid g \in K\} \overset{\text{merk.}}{=} \delta$
ja nyt

$$C \subset \bar{B}_{d'}(x, \delta+1), \text{ joka on kompakti.}$$

Havaitaan, että jos $y \in \bar{X}$ on sellainen, että $d'(gx,gy) < 1$ jollakin $g \in K$, niin $gy \in C$ ja $y \in KC \subset K\bar{B}_{d'}(x,\delta+1)$, joka on kompakti.

Olemme siis osoittaneet, että jos $y \notin KC$, niin $d'(gx,gy) \geq 1 \ \forall g \in K$.

Lisäksi, koska $x \in F$, niin $gx \in \overline{KF}$ ja siis $r(gx) \geq 1$ $\forall g \in K$. Siis

$$h(gx, gy) = \min\{d'(gx, gy), r(gx) + r(gy)\} \geq 1 \qquad \forall y \notin KC,\ g \in K,$$

ja

$$D(x,y) = \int_G h(gx, gy)\, dg \geq \int_G f\, dg > 1 \quad \forall y \notin KC.$$

jos $g \in K$ ja $y \notin KC$, niin $h(gx, gy) \geq 1 \geq f(g)$
jos $g \notin K$, niin $h(gx, gy) \geq 0 = f(g)$

Tämä osoittaa, että $\overline{B}_D(x,1) \subset KC \subset \underbrace{K\overline{B}_{d'}(x, \delta + 1)}_{\text{kompakti}}$.

$\square$