Liite B. (B1)

Verkoista (engl. net)

kts. esim. [Kelley: General topology], [Väisälä: Top. II, s. 28-29]

Jonolla avaruudessa X tarkoitetaan funktiota $S: \mathbb{N} \to X$. Sen jäseniä merkitään jatkossa S_n tai $S(n)$, $n \in \mathbb{N}$.
Jono S suppenee kohti pistettä $x \in X$, jos jokaista x:n ympäristöä U kohti on olemassa sellainen $n_u \in \mathbb{N}$, että $S_n \in U$, kun $n \geq n_u$.

Huomataan, että suppenemisen määritelmässä käytetään oleellisesti $\mathbb{N}$:n järjestysrelaatiota, mutta ei muita $\mathbb{N}$:n ominaisuuksia, laskutoimituksia tms.

Osajonon käsite voidaan määritellä seuraavasti: jos $S: \mathbb{N} \to X$ on jono ja $N: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on aidosti kasvava funktio, niin yhdiste $T = S \circ N: \mathbb{N} \to X$ on S:n osajono.
Yleisessä tilanteessa tämä ei osoittaudu hyväksi määritelmäksi, vaan käytetään ideaa: "kun i tulee suureksi, myös $N(i)$ tulee suureksi".
Tarkemmin: T on S:n osajono $\Leftrightarrow$ on olemassa $N: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s.e. $T = S \circ N$ ja $\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists n \in \mathbb{N}$ s.e. $N(i) \geq m$ kun $i \geq n$.

N_1-avaruuksissa avaruuden topologia voidaan ilmaista jonojen ja niiden suppenemisen avulla; Esim. jos X on N_1 top. avaruus ja $A \subset X$, niin:

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists \text{ jono } A\text{:n pisteitä, joka suppenee pisteeseen } x.$$

[Väisälä: Top. II, Lause 12.8]

Esim. B.1. [Väisälä, harj. teht. 7:5]

X = tuloavaruus $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (kaikki funktiot $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)
$A \subset X$ on kaikkien äärellisten joukkojen karakterististen funktioiden joukko.
Tällöin vakiofunktio g, $g(x) = 1$, kuuluu A:n sulkeumaan, mutta mikään A:n jono ei suppene kohti g:tä.

Pal. mieleen merkintä: $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, f:n "x-koordinaatti" f_x on f:n arvo $f(x)$
(vrt. [Väisälä, 7.4])

B2

1) g:n kantaympäristö tuloavaruudessa $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ on muotoa

$$U = \prod_{a\in\mathbb{R}} U_a ,$$

missä U_a on luvun 1 ympäristö $\mathbb{R}$:ssä jokaisella $a\in\mathbb{R}$ ja $U_a \neq \mathbb{R}$ vain äärell. monella $a\in\mathbb{R}$;
merk. $B = \{a\in\mathbb{R} \mid U_a \neq \mathbb{R}\}$, B äärellinen.

Karakteristinen funktio $\chi_B \in A$ on funktio

$$(\chi_B)_a = \chi_B(a) = \begin{cases} 1, & a\in B \\ 0, & a\notin B. \end{cases}$$

Nyt $(\chi_B)_a \in U_a$ jokaisella a, eli $\chi_B \in U$.
Siis jokainen g:n ympäristö sisältää joukon A alkion, eli $g\in\bar{A}$.

2) Olkoon (f_n) mielivalt. jono A:n alkioita, eli $f_n = \chi_{B_n}$, missä $B_n \subset \mathbb{R}$ ovat äärellisiä joukkoja, $n = 1, 2, \ldots$
Nyt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$ on numeroituva, joten se on $\neq \mathbb{R}$,

ja löytyy $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Siis $f_n(x_0) = 0 \quad \forall n$.

Jos olisi $f_n \to g$, niin [Väisälä, Lause 7.13]
$\Rightarrow f_n(x) \to g(x) \ \forall x$, mutta $\underbrace{f_n(x_0)}_{=0} \not\to g(x_0) = 1$.

$\square$ Esim. 1.

Määr. B.2. Joukon D relaatio $\geq$ on suuntaus, jos $D \neq \emptyset$ ja
(1) jos $m \geq n$ ja $n \geq p$, niin $m \geq p$ $\quad \forall m,n,p \in D$
(2) $m \geq m$ $\quad \forall m \in D$
(3) jos $m, n \in D$, niin $\exists p \in D$ s.e. $p \geq m$ ja $p \geq n$.

Joukko D varustettuna suuntauksella on suunnattu joukko.

Esim. • jokainen $A \subset \mathbb{R}$ on suunnattu joukko (tavallinen $\mathbb{R}$:n $\geq$)
• jos X on topologinen avaruus ja $a\in X$, niin pisteen ympäristöt muodostavat suunnatun joukon kun määritellään

$$U \geq V \iff U \subset V.$$

Ehdot (1) ja (2) ovat selvästi voimassa.
Ehto (3): jos U ja V ovat a:n ymp., niin $U \cap V$ on a:n ymp.
ja $U\cap V \geq U$ ja $U \cap V \geq V$.
(• vastaava kuin edellä, mutta $U \geq V \iff U \supset V$.)

B3

Määr. B.3 Avaruuden X verkolla tarkoitetaan kuvausta $\varphi : D \to X$, missä $(D, \geq)$ on suunnattu joukko.
Verkko φ suppenee kohti pistettä $a \in X$, jos jokaista a:n ympäristöä U kohti on olemassa sellainen $\lambda \in D$, että $\varphi(\alpha) \in U \ \forall \alpha \geq \lambda$. Merk. $\varphi \to a$.
Piste $a \in X$ on verkon φ kasautumisarvo (engl. cluster point), jos jokaista a:n ympäristöä U ja jokaista $\alpha \in D$ kohti on olemassa $\beta \in D$, s.e. $\beta \geq \alpha$ ja $\varphi(\beta) \in U$.

Tapauksessa $(D, \geq) = (\mathbb{N}, \geq)$ saadaan jonon, jonon suppenemisen ja jonon kasautumisarvon käsitteet.

Joitakin sanontatapoja: Verkko φ on joukossa A $(A \subset X)$, jos $\varphi(\alpha) \in A \ \forall \alpha \in D$. Verkko φ on lopulta joukossa A (engl. eventually), jos $\exists \lambda \in D$ s.e. $\varphi(\alpha) \in A \ \forall \alpha \geq \lambda$ (vrt. suppeneminen). Verkko φ on toistuvasti joukossa A (engl. frequently), jos $\forall \alpha \in D \ \exists \beta \in D$ s.e. $\beta \geq \varphi$ ja $\varphi(\beta) \in A$ (vrt. kasautumisarvo).

Suunnatun joukon D osajoukko D' on kofinaalinen (engl. cofinal), jos $\forall \alpha \in D \ \exists \beta \in D'$ s.e. $\beta \geq \alpha$. Kofinaalinen osajoukko on myös suunnattu joukko.
Esim. $\mathbb{N}$:ssä kofinaalinen = ei ylhäältä rajoitettu.

Havainto: Verkko φ on toistuvasti joukossa A
$\iff \exists$ kofinaalinen $D' \subset D$ s.e. $\varphi(D') \subset A$
$\iff \varphi$ ei ole lopulta $(X \setminus A)$:ssa.

Teoreema B.4. Olk. X topologinen avaruus, $A \subset X$, $a \in X$.
Tällöin $a \in \bar{A} \iff \exists$ verkko joukossa A, joka suppenee kohti a:ta.

Tod. "$\Leftarrow$" Ol. φ verkko joukossa A, $\varphi \to a$.
Olk. U pisteen a mielivalt. ympäristö. Koska $\varphi \to a$, ympäristöstä U löytyy verkon φ pisteitä, eli joukon A pisteitä. Siis $a \in \bar{A}$.

"$\Rightarrow$" Olk. D kaikkien pisteen a ympäristöjen kokoelma, suuntauksena $U \geq V \Leftrightarrow U \subset V$.
Koska $a \in \overline{A}$, jokaisesta ympäristöstä U löytyy piste $x_U \in U \cap A$.
Nyt $\varphi : D \to \overline{X}$, $U \mapsto x_U$, on verkko $\overline{X}$:ssä.
Lisäksi $\varphi \to a$: olk. U a:n ympäristö. Jos $V \geq U$, on siis $\varphi(V) = x_V \in V \subset U$, joten suppenemisen määritelmän ehto on voimassa.

$\square$

<u>Teoreema B.5.</u> Topologinen avaruus $\overline{X}$ on Hausdorffin avaruus $\Leftrightarrow$ jokainen verkko $\overline{X}$:ssä suppenee korkeintaan yhtä pistettä kohti.

<u>Tod.</u> HT.

$\square$

Jos $(D, \geq)$ ja $(E, \succ)$ ovat suunnattuja joukkoja, määritellään tulojoukkoon $D \times E$ suuntaus $\gg$ seuraavasti:

$$(d, e) \gg (f, g) \Leftrightarrow d \geq f \text{ ja } e \succ g.$$

Vastaavalla idealla saadaan määriteltyä suuntaus mielivaltaiseen tuloavaruuteen $\prod_{\alpha \in A} D_\alpha$, jos jokainen D_α on suunnattu joukko.
Ei ole vaikeaa tarkistaa, että näin saatu relaatio on suuntaus.

<u>Esim.</u> $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $f \geq g \Leftrightarrow f(x) \geq g(x) \; \forall x \in \mathbb{R}$.

Seuraavaksi määritellään osaverkon (engl. subnet) käsite.

<u>Määr. B.6.</u> Verkko $\varphi : D \to \overline{X}$ on verkon $\psi : E \to \overline{X}$ <u>osaverkko</u>, jos on olemassa funktio $N : D \to E$ s.e.
1) $\varphi = \psi \circ N : D \to E \to \overline{X}$
2) $\forall m \in E \; \exists n \in D$ s.e. jos $p \geq n$, niin $N(p) \geq m$.

Tärkeä havainto:
<u>Lemma B.7.</u> Jos verkko ψ on lopulta joukossa $A \subset \overline{X}$, niin myös osaverkko $\varphi = \psi \circ N$ on lopulta joukossa A.

Tod. Koska ψ on lopulta joukossa A, niin $\exists\, m \in E$ s.e. $\psi(\alpha) \in A$, kun $\alpha \geq m$. Osaverkon määr. ehto 2) $\Rightarrow$ $\exists\, n \in D$ s.e. $N(p) \geq m$ kun $p \geq n$.

Siis kun $p \geq n$, on $\varphi(p) = \psi(\underbrace{N(p)}_{\geq m}) \in A$,

eli φ on lopulta joukossa A.

$\square$

Huom. Jos D on E:n kofinaalinen osajoukko, niin inkluusio $N : D \hookrightarrow E$ toteuttaa osaverkon määritelmän ehdot. Tietyissä tilanteissa tämä riittäisi osaverkon määritelmäksi, mutta ei kaikissa. Tarvitaan siis y.o. yleisempi määritelmä.

Lemma B.8. Olk. ψ verkko $E \to \mathbb{X}$, $\mathcal{A}$ joukko $\mathbb{X}$:n osajoukkoja s.e. $\forall A, B \in \mathcal{A}\ \exists\, C \in \mathcal{A}$ s.e. $C \subset A \cap B$ $(*)$.
Ol. lisäksi, että ψ on toistuvasti A:ssa $\forall A \in \mathcal{A}$.
Tällöin on ol. ψ:n osaverkko φ s.e. φ on lopulta A:ssa $\forall A \in \mathcal{A}$.

Tod. Oletuksesta $(*)$ seuraa, että $\mathcal{A}$ on suunnattu joukko, kun määr. $A \geq B \iff A \subset B$.

Olkoon

$$D = \{(m, A) \mid m \in E,\ A \in \mathcal{A} \text{ ja } \psi(m) \in A\},$$

jolloin D on suunnattu joukko tulo-suuntauksen suhteen:

ehto (3): jos $(m, A), (n, B) \in D$, niin $\exists\, C \in \mathcal{A}$ s.e. $C \subset A \cap B$ eli $C \geq A$ ja $C \geq B$. Lisäksi $\exists\, p \in E$ s.e.

$$p \geq m,\quad p \geq n \text{ ja } \psi(p) \in C,$$

koska ψ on toistuvasti joukossa C.

Nyt $(p, C) \in D$ ja $(p, C) \geq (m, A)$ sekä $(p, C) \geq (n, B)$. $\square$(3)

Määritellään $N : D \to E$
$$(m, A) \mapsto m$$
ja osoitetaan, että $\varphi = \psi \circ N$ on ψ:n osaverkko:

ehto 2): olk. $m \in E$. Val. $A \in \mathcal{A}$. Koska ψ on toistuvasti joukossa A, niin $\exists\, n \geq m$ s.e. $\psi(n) \in A$ eli $(n, A) \in D$.
Jos nyt $(p, B) \geq (n, A)$, on

$$N(p, B) = p \geq n \geq m$$ eli B.6 ehto 2) on voimassa.

Siis φ on osaverkko.

Olk. sitten $A \in \mathcal{A}$. Os. että φ on lopulta A:ssa:
olk. $m \in E$ mielivalt. s.e. $\psi(m) \in A$. Tällöin $(m, A) \in D$,
osoitetaan, että (m, A) kelpaa määritelmän rajaksi λ.
Olk. $(n, B) \in D$, $(n, B) \geq (m, A)$. Nyt
$$\varphi(n, B) = \psi \circ N(n, B) = \psi(n) \underset{\text{koska } (n,B)\in D}{\in} B \overset{\text{koska } (n,B)\geq(m,A)}{\subset} A. \quad \underline{\text{ok.}}$$
$\square$

Teoreema B.9. X top. avaruus, $s \in X$, ψ verkko X:ssä.
Piste s on verkon ψ kasautumisarvo
$\iff$ $\exists$ ψ:n osaverkko φ, jolle $\varphi \to s$.

Tod. "$\Rightarrow$" ol. s ψ:n kasautumisarvo ja olk. $\mathcal{A}$ kaikkien s:n ympäristöjen kokoelma. Tällöin kahden $\mathcal{A}$:n jäsenen leikkaus $\in \mathcal{A}$, lisäksi verkko ψ on toistuvasti joukossa A $\forall A \in \mathcal{A}$.
B.8. $\Rightarrow$ $\exists$ ψ:n osaverkko φ, joka on lopulta A:ssa $\forall A \in \mathcal{A}$, t.s. $\varphi \to s$.

"$\Leftarrow$" ol. että s ei ole verkon ψ kasautumisarvo.
Tällöin $\exists$ s:n ympäristö U s.e. ψ ei ole toistuvasti U:ssa, joten ψ on lopulta komplementissa $X \setminus U$.
B.7 $\Rightarrow$ ψ:n jokainen osaverkko on lopulta $(X \setminus U)$:ssa, joten mikään osaverkko ei voi $\to s$.
$\square$

Jatkuvuus voidaan karakterisoida verkkojen avulla samoin kuin metrisissä avaruuksissa jonojen avulla.

Teoreema B.10. Olk. X, Y top. avaruuksia, $f: X \to Y$ funktio, $s \in X$.
Tällöin f on jatkuva pisteessä s
$\iff$ jokaisella verkolla φ X:ssä, jolla $\varphi \to s$ pätee $f \circ \varphi \to f(s)$.

Tod. "$\Rightarrow$": olk. φ verkko X:ssä, $\varphi \to s$.
olk. U pisteen $f(s)$ ympäristö Y:ssä.
Koska f on jatkuva, on olemassa pisteen s ympäristö V X:ssä, s.e. $f(V) \subset U$.
Koska $\varphi \to s$, niin φ on lopulta joukossa V, joten (koska $f(V) \subset U$) $f \circ \varphi$ on lopulta joukossa U.
Siis $f \circ \varphi \to f(s)$.

B7

"$\Leftarrow$" [Väisälä, Lause 3.2] $\Rightarrow$ riittää osoittaa, että jos $A \subset \overline{X}$ ja $s \in \overline{A}$, niin $f(s) \in \overline{fA}$.
Olk. siis $A \subset \overline{X}$ ja $s \in \overline{A}$.
Koska $s \in \overline{A}$, niin B.4 $\Rightarrow$ $\exists$ verkko φ A:ssa, $\varphi \to s$.
Tällöin $f \circ \varphi$ on verkko joukossa fA ja oletuksen nojalla $f \circ \varphi \to f(s)$.
Nyt B.4 $\Rightarrow$ $f(s) \in \overline{fA}$.

$\square$

Samoin kompaktisuus:

Teoreema B.11. Topologiselle avaruudelle $\overline{X}$ seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:
(1) $\overline{X}$ on kompakti
(2) jokaisella verkolla $\overline{X}$:ssä on kasautumisarvo ($\overline{X}$:ssä)
(3) jokaisella verkolla $\overline{X}$:ssä on osaverkko, joka suppenee ($\overline{X}$:ssä).

[Palautetaan ensin mieleen [Väisälä, s. 119]:
Kokoelmalla $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\overline{X})$ on äärellisten leikkausten ominaisuus (ÄLO), jos $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$ kaikilla äärellisillä $\mathcal{A}$, joilla $\emptyset \neq \mathcal{A} \subset \mathcal{F}$.
Esim. välien kokoelmalla $\mathcal{F} = \{ [n, \infty[\mid n \in \mathbb{N} \}$ on ÄLO, vaikka $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$.

15.9. Lause S.E.Y.:
(1) $\overline{X}$ on kompakti
(2) Olkoon $\mathcal{F}$ kokoelma $\overline{X}$:n sulj. osajoukkoja ja olk. $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$.
Tällöin $\exists$ äärellinen $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ s.e. $\bigcap \mathcal{F}_0 = \emptyset$.
(3) Jos $\mathcal{F}$ on kokoelma $\overline{X}$:n suljettuja osajoukkoja ja jos $\mathcal{F}$:llä on ÄLO, niin $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.]

Tod. (1) $\Rightarrow$ (2): ol. $\overline{X}$ kompakti, $\varphi: (D, \geq) \to \overline{X}$ verkko.
Jokaisella $n \in D$ määr.
$$A_n = \{ \varphi(m) \mid m \geq n \}.$$
Koska D on suunnattu joukko, on kokoelmalla $\{A_n\}_{n \in D}$ ÄLO:
jos $n_1, \ldots, n_k \in D$, niin määritelmän B.2 (3) nojalla $\exists\, p \in D$ s.e. $p \geq n_1, \ldots, p \geq n_k$. Tällöin $\varphi(p) \in \bigcap_{i=1}^{k} A_{n_i}$.

Myös kokoelmalla $\{\overline{A_n}\}_{n \in D}$ on ÄLO.

Koska $\bar{X}$ on kompakti, niin $\exists\ s \in \bigcap_{n\in D} \bar{A}_n$.
Nyt s on φ:n kasautumisarvo, mistä väite seuraa:
Jos s ei olisi φ:n kas. arvo, sillä olisi ympäristö U ja olisi olemassa $n \in D$ s.e. $\varphi(m) \notin U\ \ \forall m \geq n$.
Tällöin olisi $U \cap A_n = \emptyset$ eli $s \notin \bar{A}_n$, ristiriita.

(2) $\Rightarrow$ (1): ol., että $\bar{X}$ on top. avaruus, jonka jokaisella verkolla on kasautumisarvo ja $\mathcal{A}$ perhe $\bar{X}$:n sulj. osajoukkoja, jolla on ÄLO.
Määr. $\mathcal{B} = \mathcal{A}$:n jäsenten äärellisten leikkausten kokoelma.
Myös kokoelmalla $\mathcal{B}$ on ÄLO.
Lisäksi koska $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, riittää os. että $\bigcap_{B\in\mathcal{B}} B \neq \emptyset$.

Koska $C \cap D \in \mathcal{B}\ \ \forall C, D \in \mathcal{B}$, niin $(\mathcal{B}, \geq)$ on suunnattu joukko, kun määritellään $C \geq D \Leftrightarrow C \subset D$.
Määritellään verkko $\varphi : (\mathcal{B}, \geq) \to \bar{X}$ valitsemalla jokaisella $B \in \mathcal{B}$ alkio $\varphi(B) \in B \subset \bar{X}$.
Oletuksen nojalla verkolla φ on kasautumisarvo $s \in \bar{X}$.
Os., että $s \in B\ \ \forall B \in \mathcal{B}$, mistä väite seuraa.
Olk. $B \in \mathcal{B}$ ja olk. $C \in \mathcal{B}$ s.e. $C \subset B$. Nyt $\varphi(C) \in C \subset B$, mistä seuraa, että φ on lopulta joukossa B. Koska B on suljettu, välttämättä kasautumisarvo $s \in B$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3): Seuraa Teoreemasta B.9.

$\square$

Teoreema B.12. Ol. $\bar{X}$, Y top. avaruuksia, $f : \bar{X} \to Y$ suljettu jatkuva kuvaus, jolle $f^{-1}(y)$ on kompakti $\forall y \in Y$ (vahva kuvaus, erään kirjallisuudessa esiintyvän määritelmän mukaan).
Olk. $\varphi : (D, \geq) \to \bar{X}$ verkko s.e. verkko $f \circ \varphi \to y_0 \in Y$.
Tällöin verkolla φ on olemassa kasautumisarvo $x \in \bar{X}$.

Tod. Merk. $A_n = \{\varphi(m) \mid m \geq n\} \subset \bar{X}$, ja tark. sulkeumia $\bar{A}_n$.
Koska f on suljettu kuvaus, on $f(\bar{A}_n) \in Y\ \ \forall n$, joten $f(\bar{A}_n) = \overline{f(A_n)}\ \ \forall n$.
Nyt $f(\varphi(m)) \in f(A_n)\ \ \forall m \geq n$, joten $y_0 \in \overline{f(A_n)} = f(\bar{A}_n)\ \ \forall n \in D$.
Tästä seuraa, että
$$f^{-1}(y_0) \cap \bar{A}_n \neq \emptyset \quad \forall n. \qquad (*)$$

B9

Osoitetaan, että kokoelmalla $\{f^{-1}(y_0) \cap \overline{A_n}\}_{n\in D}$ on ÄLO:

olk. $n_1, \dots, n_k \in D$. Nyt

$$(f^{-1}(y_0) \cap \overline{A_{n_1}}) \cap \dots \cap (f^{-1}(y_0) \cap \overline{A_{n_k}})$$

$$= f^{-1}(y_0) \cap \bigcap_{i=1}^{k} \overline{A_{n_i}}.$$

Valitaan $p \in D$, jolle pätee $p \geq n_1, \dots, p \geq n_k$.
Joukkojen A_n määritelmästä seuraa nyt, että $A_p \subset \bigcap_{i=1}^{k} A_{n_i}$,
joten

$$f^{-1}(y_0) \cap \bigcap_{i=1}^{k} \overline{A_{n_i}} \supset f^{-1}(y_0) \cap \overline{\bigcap_{i=1}^{k} A_{n_i}} \supset f^{-1}(y_0) \cap \overline{A_p} \overset{(*)}{\neq} \emptyset.$$

Siis kokoelmalla on ÄLO, joten (koska $f^{-1}(y_0)$ on kompakti),
niin

$$\exists\ x \in f^{-1}(y_0) \cap \bigcap_{n\in D} \overline{A_n}.$$

Tästä seuraa, että $f(x) = y_0$ ja $x \in \overline{A_n}$ $\forall n \in D$,
mistä seuraa, että jokainen x:n ympäristö sisältää joukon A_n
pisteitä $\forall n$, joten verkko φ on toistuvasti jokaisessa x:n ympäristössä.
Siis x on verkon φ kasautumisarvo.

$\square$