Liite A.

Parakompaktisuus

Määritellään ensin muutamia peitteisiin liittyviä käsitteitä:

Määr. A.1. Olk. X avaruus. Perhe $(A_j)_{j\in J}$ X:n osajoukkoja on **lokaalisti äärellinen**, jos $\forall x \in X$ $\exists$ ymp. U_x s.e. $U_x \cap A_j \neq \emptyset$ vain äärellisen monella indeksillä j.
Perhe $(A_j)_{j\in J}$ on **pisteäärellinen** (point-finite), jos $\forall x \in X$: $x \in A_j$ vain äärell. monella indeksillä j.

Selvästi lokaalisti äärell. perhe on pisteäärellinen.
Esim. • perhe $\{[-n,n] \mid n\in \mathbb{N}\}$ ei ole pisteäärellinen.
• perhe $\{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$ on pisteäärellinen, mutta ei lok. äärellinen.
• perhe $\{[n,\infty[\mid n \in \mathbb{N}\}$ on lokaalisti äärellinen.

Kuten Väisälän kirjassa, käsitellään peitteitä indeksöityinä, t.s. avaruuden X **peite** on sellainen perhe $(A_j)_{j\in J}$, että $X = \bigcup_{j\in J} A_j$. Peite on **avoin**, jos sen jokainen jäsen A_j on avoin.

Jatkuvan funktion $g: X \to \mathbb{R}$ **kantaja** (engl. support) on joukko
$$spt(g) = \overline{\{x \in X \mid g(x) \neq 0\}}.$$
Nollafunktion kantaja on $\emptyset$.

Olk. $(g_j)_{j\in J}$ perhe jatkuvia funktioita $g_j: X \to \mathbb{R}$ s.e. perhe $(spt(g_j))_{j\in J}$ on lokaalisti äärellinen.
Erityisesti joukko $K(x) = \{j \in J \mid g_j(x) \neq 0\}$ on äärellinen $\forall x \in X$.
Asettamalla
$$g(x) = \sum_{j\in K(x)} g_j(x)$$
saadaan funktio $g: X \to \mathbb{R}$, merk. $g = \sum_{j\in J} g_j$.

Jos $x \in X$, niin x:llä on ympäristö U, jossa funktio g on äärellinen summa jatkuvista funktioista; siis g on jatkuva U:ssa. Siis g on jatkuva jokaisen pisteen eräässä ympäristössä, joten g on jatkuva koko X:ssä.

A2

(engl. partition of unity)

Määr. A.2. Perhe $(g_j)_{j\in J}$ jatkuvia funktioita $g_j : X \to I$ on <u>ykkösen ositus</u>, jos
1) perhe $(\mathrm{spt}(g_j))_{j\in J}$ on lokaalisti äärellinen
2) $\sum_{j\in J} g_j(x) = 1 \quad \forall x \in X$.

Koska jokaisessa pisteessä jokin $g_j(x) > 0$, niin $(\mathrm{spt}(g_j))_{j\in J}$ on X:in lokaalisti äärellinen peite.

Esim. jos $X = [0,1]$, funktiot $x \mapsto x$ ja $x \mapsto 1-x$ muodostavat ykkösen osituksen.
(Esim. kuva)

Olk. $(U_j)_{j\in J}$ avaruuden X avoin peite. Sanomme, että ykkösen ositus $(g_j)_{j\in J}$ on peitteeseen (U_j) <u>sopiva</u>, jos $\mathrm{spt}(g_j) \subset U_j \quad \forall j \in J$.
(engl. partition of unity subordinated to the covering $(U_j)_{j\in J}$)

Lause A.3. Jos $(A_j)_{j\in J}$ on lokaalisti äärellinen perhe suljettuja joukkoja, niin yhdiste $\bigcup\{A_j \mid j\in J\}$ on suljettu.

Tod. HT.

$\square$

Lemma A.4. Olk. (X,d) metrinen avaruus, jonka läpimitta $d(X) \le 1$, ja olkoon $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ X:n avoin peite. Tällöin on olemassa sellainen ykkösen ositus $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, että $\mathrm{spt}(g_n) \subset \overline{U}_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

Tod. Jos $U_k = X$ jollakin $k\in\mathbb{N}$, valitaan $g_k \equiv 1$, $g_n \equiv 0$, $n \ne k$.
Ol. nyt, että $U_n \ne X \quad \forall n\in\mathbb{N}$.
Merk. $V_1 = \emptyset$, $V_n = \bigcup_{k<n} U_k$, $n \ge 2$.
Määr. $f_n : X \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = d(x, X\setminus U_n) - n\cdot d(x, X\setminus V_n), \quad n\in\mathbb{N}$$

ja $h_n : X \to \mathbb{R}$

$$h_n(x) = \max\{f_n(x), 0\}.$$

Selvästi f_n ja h_n ovat jatkuvia ja $\mathrm{spt}(h_n) \subset \overline{U}_n$
(jos $x \notin \overline{U}_n$, on $d(x, X\setminus U_n) = 0$ ja siis $f_n(x) \le 0$ ja $h_n(x) = 0$).

A3

Osoitetaan, että perhe $(spt(h_n))$ on lokaalisti äärellinen:
olk. $y \in \overline{X}$. Val. $k \in \mathbb{N}$ s.e. $y \in U_k$ ja luku $r > 0$, jolla $B(y, 2r) \subset U_k$. Riittää osoittaa, että kuula $W = B(y, r)$ ei kohtaa joukkoja $spt(h_n)$, kun $n > \frac{1}{r}$ ja $n > k$.
Olk. $x \in W$. Koska $U_k \subset V_n$ $(n > k)$, niin

$$(*) \quad d(x, \overline{X} \setminus V_n) \geq d(x, \overline{X} \setminus U_k) \geq \underbrace{d(y, \overline{X} \setminus U_k)}_{\geq 2r} - \underbrace{d(x,y)}_{< r} > r.$$

Koska $d(\overline{X}) \leq 1$, saadaan

$$f_n(x) \underset{(*)}{<} 1 - nr \underset{n > \frac{1}{r}}{<} 0.$$

Siis $h_n(x) = 0 \ \forall x \in W$, joten $W \cap spt(h_n) = \emptyset$.

Voidaan siis määritellä jatkuva funktio $h = \sum_{n \in \mathbb{N}} h_n : \overline{X} \to [0, \infty[$.

Lisäksi $h(x) > 0 \ \forall x \in \overline{X}$, sillä jos n on pienin luku, jolla $x \in U_n$, niin $x \notin V_n$, joten $f_n(x) = d(x, \overline{X} \setminus U_n) > 0$ ja siis $h(x) \geq h_n(x) > 0$.

Funktiot g_n: $g_n(x) = \frac{h_n(x)}{h(x)}$
muodostavat vaaditun ykkösen osituksen $\left(\sum g_n(x) = \frac{\sum h_n(x)}{h(x)} = 1 \right)$.

$\square$

<u>Lause A.5.</u> Metrisyvässä N_2-avaruudessa $\overline{X}$ on jokaista avointa peitettä kohti olemassa siihen sopiva ykkösen ositus.

<u>Tod.</u> Olk. $(U_j)_{j \in J}$ $\overline{X}$:n avoin peite. Topologia I: 10.6 $\Rightarrow$
$\exists$ $\overline{X}$:n metriikka, joka määrää $\overline{X}$:n topologian ja jossa $d(\overline{X}) \leq 1$.

Kullakin $x \in \overline{X}$ val. $i(x) \in J$, jolla $x \in U_{i(x)}$ ja luku $r(x) > 0$, jolla $B(x, 2r(x)) \subset U_{i(x)}$. Kuulat $B(x, r(x))$, $x \in \overline{X}$, muodostavat $\overline{X}$:n avoimen peitteen. N_2-avaruus on aina Lindelöf (Väisälä: Lause 12.14), joten tällä peitteellä on numeroituva osapeite, t.s. void. valita $\overline{X}$:n jono $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s.e. kuulat $B(x_n, r(x_n))$, $n \in \mathbb{N}$, peittävät $\overline{X}$:n.

Lemman A.4. nojalla $\exists$ ykkösen ositus $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jolla $spt(g_n) \subset \overline{B}(x_n, r(x_n)) \subset U_{i(x_n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Kun $j \in J$, merk. $K(j) = \{n \in \mathbb{N} \mid i(x_n) = j\}$ ja määr.

$$h_j : X \to [0,1]$$

$$(*) \qquad h_j(x) = \sum_{n \in K(j)} g_n(x).$$

Jos $K(j) = \emptyset$, määr. $h_j \equiv 0$.

Huom. koska perhe $(spt(g_n))$ on lok. äärellinen, niin (kiinteällä x:n arvolla) summassa $(*)$ on vain äärellisen monta nollasta eroavaa termiä.

Funktiot h_j ovat jatkuvia
$spt(h_j) \subset U_j$ $\forall j \in J$
Perhe (h_j) on haettu ykkösen ositus

HT

$\square$

Määr. A.6. Olk. $\{A_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ ja $\{B_\beta \mid \beta \in \mathcal{B}\}$ kaksi avaruuden X peitettä. Sanomme, että peite $\{B_\beta\}$ on peitteen $\{A_\alpha\}$ tihennys (engl. refinement)

$$\forall \beta \in \mathcal{B}\ \exists \alpha \in \mathcal{A} \text{ s.e. } B_\beta \subset A_\alpha.$$

Merk. $\{B_\beta\} <\{$

Tihennys on tarkka (precise), jos

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \text{ ja } B_\alpha \subset A_\alpha \ \forall \alpha \in \mathcal{A}.$$

Määr. A.7. Hausdorffin avaruus X on parakompakti, jos jokaisella X:n avoimella peitteellä on avoin lokaalisti äärellinen tihennys.

Lause A.8. Olk. $\{A_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ ja $\{B_\beta \mid \beta \in \mathcal{B}\}$ avaruuden X peitteitä. Tällöin

1) $\{A_\alpha \cap B_\beta \mid (\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}\}$ on X:n peite, joka on sekä $\{A_\alpha\}$:n että $\{B_\beta\}$:n tihennys.
Jos $\{A_\alpha\}$ ja $\{B_\beta\}$ ovat lokaalisti äärellisiä (vast. pisteäärellisiä) niin $\{A_\alpha \cap B_\beta\}$ on lok. äärellinen (vast. pisteäärellinen).

2) Jokainen peitteiden $\{A_\alpha\}$ ja $\{B_\beta\}$ yhteinen tihennys (siis peite $\{C_\gamma\}$, jolle $\{C_\gamma\} < \{A_\alpha\}$ ja $\{C_\gamma\} < \{B_\beta\}$) on myös peitteen $\{A_\alpha \cap B_\beta\}$ tihennys.

Tod. HT.

□

A5

Lause A.9. Jos peitteellä $\{A_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ on pisteäärellinen (vast. lok. äärellinen) tihennys $\{B_\beta \mid \beta \in \mathcal{B}\}$, niin sillä on myös tarkka pisteäärellinen (vast. lok. äärellinen) tihennys $\{C_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$.
Lisäksi, jos jokainen B_β on avoin, niin myös joukot C_α voidaan valita avoimiksi.

Tod. Määr. funktio $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, joka jokaiseen $\beta \in \mathcal{B}$ liittää jonkin $\alpha \in \mathcal{A}$, jolle $B_\beta \subset A_\alpha$.
Jokaiselle α, olkoon $C_\alpha = \bigcup \{B_\beta \mid \varphi(\beta) = \alpha\}$; jotkin C_α voivat olla tyhjiä. Selvästi $C_\alpha \subset A_\alpha$ $\forall \alpha$, ja myös $\{C_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ on peite, koska jokainen B_β sisältyy johonkin C_α:aan. Samoin on selvää, että C_α on avoin, jos joukot B_β ovat avoimia.
Jos $\{B_\beta\}$ on pisteäärellinen, niin jokainen $x \in X$ kuuluu vain äärell. moneen B_β ja siis korkeintaan yhtä moneen C_α.
Vastaavasti, jos $\{B_\beta\}$ on lok. äärellinen, niin jokaisella $x \in X$ on ympäristö U, joka kohtaa vain äärellisen monta joukoista B_β. Tämä ympäristö kohtaa siis korkeintaan näin monta joukoista C_α. □

Teoreema A.10. Jokainen parakompakti avaruus X on normaali.
Tod. Os. ensin, että X on säännöllinen. Olk. $x \in X$, $A \Subset X$, $x \notin A$.
Koska X on Hausdorff, on jokaisella $a \in A$ ympäristö U_a s.e. $x \notin \overline{U_a}$. Koska $\{U_a \mid a \in A\} \cup \{X \setminus A\}$ on X:n avoin peite, on sillä parakompaktiuden ja Lauseen A.9 nojalla tarkka avoin lok. äärellinen tihennys $\{V_a \mid a \in A\} \cup \{G\}$.
Tällöin $W = \bigcup \{V_a \mid a \in A\}$ on avoin ja sisältää A:n. Lisäksi, koska $\{V_\alpha\}$ on lok. äärellinen, on Lauseen A.3 nojalla $\overline{W} = \bigcup \{\overline{V_a} \mid a \in A\}$. Koska $x \notin \overline{U_a} \supset \overline{V_a}$ $\forall a \in A$, on siis $x \notin \overline{W}$. Siis $X \setminus \overline{W}$ ja W ovat x:n ja A:n erill. ympäristöt, mikä osoittaa säännöllisyyden.
Normaalius: olk. $A, B \Subset X$, $A \cap B = \emptyset$. Säännöllisyydestä seuraa, että $\forall a \in A$ $\exists$ ymp. U_a s.e. $\overline{U_a} \cap B = \emptyset$. Vastaava päättely kuin edellä (missä y korvataan B:llä) antaa A:lle ja B:lle erilliset ympäristöt.

□

A6

Teoreema A.11. Olk. $\bar{X}$ parakompakti. Tällöin jokaisella $\bar{X}$:n avoimella peitteellä $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ on olemassa tähän peitteeseen sopiva ykkösen ositus.

Tod. Parakompaktisuuden nojalla on olemassa peitteen $\{U_\alpha\}$ tarkka avoin lok. äärellinen tihennys $\{U'_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Voidaan osoittaa (kts. [Dugundji: Topology, VII 6.1., s. 152], palataan todistukseen myöhemmin, jos ehditään), että normaalisuudesta seuraa: on olemassa lok. äärellinen avoin peite $\{V_\alpha\}$ s.e. $\overline{V_\alpha} \subset U'_\alpha$.
Sama uudelleen: saadaan lok. äärellinen avoin peite $\{W_\alpha\}$ s.e. $\overline{W_\alpha} \subset V_\alpha$.
Koska $\bar{X}$ on normaali, löydetään Urysonin lemman avulla jokaiselle $\alpha \in A$ jatkuva funktio $g_\alpha : \bar{X} \to I$ s.e. $g_\alpha | \overline{W_\alpha} \equiv 1$ ja $g_\alpha | (\bar{X} \setminus V_\alpha) \equiv 0$ (jos $V_\alpha = \emptyset$, määr. $g_\alpha \equiv 0$).
Siis $\operatorname{spt}(g_\alpha) \subset \overline{V_\alpha} \subset U_\alpha \ \forall \alpha \in A$.
Koska $\{\overline{W_\alpha}\}$ on lok. äärellinen peite, niin jokaisella $x \in \bar{X}$ vähintään 1 mutta vain äärellisen moni funktioista g_α on $\neq 0$.
Siis $\sum_\alpha g_\alpha$ on hyvin määr. funktio $\bar{X} \to \mathbb{R}$ ja $\sum g_\alpha(x) \neq 0 \ \forall x$.
Jatkuvuus: jokaisella pisteellä on ympäristö, jossa vain äärellisen moni funktioista g_α ei ole $\equiv 0$; siis $\sum g_\alpha$ on jatkuva jokaisen pisteen eräässä ympäristössä, siis kaikkialla $\bar{X}$:ssä.
Haluttu ykkösen ositus on perhe $\{h_\alpha \mid \alpha \in A\}$, missä

$$h_\alpha(x) = \frac{g_\alpha(x)}{\sum_\alpha g_\alpha(x)}.$$

$\square$

Sovellus A.12. Jos $\{h_\alpha \mid \alpha \in A\}$ on ykkösen ositus avaruudella $\bar{X}$ ja $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in A\}$ on perhe jatkuvia funktioita $\varphi_\alpha : \bar{X} \to \mathbb{R}$, niin funktio $\varphi : \bar{X} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \sum_\alpha \varphi_\alpha(x) h_\alpha(x)$, on jatkuva.

Itse asiassa funktioiden φ_α ei tarvitse olla määriteltyjä koko $\bar{X}$:ssä: Jos $\{h_\alpha \mid \alpha \in A\}$ on avoimeen peitteeseen $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ sopiva ykkösen ositus ja $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in A\}$ on perhe jatkuvia funktioita $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$, määritellään funktiot $f_\alpha : \bar{X} \to \mathbb{R}$,

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \varphi_\alpha(x), & x \in U_\alpha \\ 0, & x \notin U_\alpha \end{cases}$$

Funktiot f_α eivät siis välttämättä ole jatkuvia.
Funktio $\varphi : \bar{X} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \sum_\alpha f_\alpha(x) h_\alpha(x)$, kuitenkin on jatkuva (HT).

$\square$

[redacted] A7

A

Teoreema A.13. Oletetaan, että avaruudella X on ominaisuus: jokaiselle avoimelle peitteelle $\{U_\alpha\}$ löytyy siihen sopiva ykkösen ositus. Tällöin X on parakompakti.

Tod. ~~Oleellisesti sama kuin Harj. 10/Teht. 5~~.
HT $\square$

Muita tuloksia (viittaukset Dugundjin kirjaan):

- Jos X on parakompakti ja $f: X \to Y$ on jatkuva suljettu surjektio, niin Y on parakompakti (s. 165)
- Jos X on parakompakti ja $A \in \mathcal{F}$, niin A on parakompakti (HT)
  (jokainen aliavaruus ei välttämättä ole)
- X_α, $\alpha \in A$ parakompakteja $\underset{\Longleftarrow}{\not\Rightarrow}$ $\prod X_\alpha$ parakompakti (s. 165)
- Jokainen metristyvä avaruus on parakompakti (s. 186).