HY Todennäköisyysteoria II, syksy 2013, laskuharjoitukset 13 (11.12.2013)

1. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ali σ-algebra ja $I(\omega)$ satunnaismuuttuja jolla $P\big(\{\ I(\omega) \in \mathbb{N}\}\big) = 1$.

   $\mathcal{G} \vee \sigma(I)$ on pienin σ-algebra joka sisältää $\mathcal{G}$ ja jonka suhteen $I : \Omega \to \mathbb{R}$ on mitallinen.

   Osoita:

   $$E_P\big(X\big|\mathcal{G} \vee \sigma(I)\big)(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}(I(\omega) = n) E_P\big(X\big|\mathcal{G}, I = n\big)(\omega) :=$$
   $$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}(I(\omega) = n) \frac{E_P\big(X\mathbf{1}(I = n)\big|\mathcal{G}\big)(\omega)}{P\big(I = n\big|\mathcal{G}\big)(\omega)}$$

   jossa

   $$E_P\big(X\big|\mathcal{G}, I = n\big)(\omega) := \frac{E_P\big(X\mathbf{1}(I = n)\big|\mathcal{G}\big)(\omega)}{P\big(I = n\big|\mathcal{G}\big)(\omega)}$$

   saa mielivaltainen arvo joukossa $\big\{\omega : P\big(I = n\big|\mathcal{G}\big)(\omega) = 0\big\}$.

   Vihje Joukot $\{\omega : I(\omega) = n\}$, $n \in \mathbb{N}$ ja $\{\omega : I(\omega) \notin \mathbb{N}\}$ muodostuvat todennäköisyysavaruuden mitallisen osituksen. Käytä ehdollisen odotusarvon määritelmää.

2. (Heikko suurten lukujen laki) Olkoon $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq L^2(P)$ satunnaismuuttujen jono joilla $E(X_n) = 0$

   $$E_P(X_n^2) \le c < \infty \; \forall n \quad , \quad E_P(X_n X_m) = 0 \quad \text{kun } n \neq m$$

   (siis $(X_n : n \in \mathbb{N})$ ovat korrelaatiomattomia).

   Merkitään $S_n(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_n(\omega)$ ja otoksen keskiarvo $\overline{S}_n(\omega) = n^{-1} S_n(\omega)$.

   (a) Osoita: $\overline{S}_n \to 0$ $L^2(P)$-mielessä ja stokastisesti kun $n \uparrow \infty$.

   (b) Osoita: kun $E_P(X_n) = \mu \; \forall n$, osoita että $\overline{S}_n \to \mu$ $L^2(P)$-mielessä ja stokastisesti.

   Vihje Laske $E_P(\overline{S}_n^2)$.

3. Olkoon $(X_t : t \in \mathbb{N}) \subseteq L^1(P)$ P-riippumattomia satunnaismuuttujat jolla $E(X_t) = 0$, (vastaavasti ≤ 0, ≥ 0) ja $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_t)$.

   Silloin $M_t = (X_1 + \cdots + X_t)$ on $(\mathcal{F}_t)$-martingaali (vastaavasti ylimartingaali, alimartingaali).

4. Olkoon $(X_t : t \in \mathbb{N}) \subseteq L^1(P)$ P-rippumattomia satunnaismuuttujat jolla $E(X_t) = 1$, (vastaavasti ≤ 1, ≥ 1) ja $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_t)$. Silloin $M_t = (X_1 \times \cdots \times X_t)$ on $(\mathcal{F}_t)$-martingaali (vastaavasti ylimartingaali, alimartingaali).

5. Olkoon $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{N})$ $\mathbb{R}^d$-arvoinent Markovin ketju jolla on alkujakauma $P(X_0 \in B) = \pi(B)$ ja siirtymä ydin $K(B, x)$ joka on todennäköisyysydin. Tässä $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ja $x \in \mathbb{R}^d$.

   Se tarkoittaa että $\forall t$, $B_0, B_1, \dots, B_t \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$P(X_0 \in B_0, X_1 \in B_1, \dots, X_t \in B_t) =$$
$$\int_{B_0} \int_{B_1} \int_{B_2} \dots \int_{B_t} K(dx_t, x_{t-1}) \dots K(dx_2, x_1) K(dx_1, x_0) \pi(dx_0)$$

   Määritellään operaattori

$$(Kf)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) K(y, dx) = E_x(f(X_1))$$

   (a) Osoita että kun $f(x)$ on mitallinen ja rajoitettu, olkoon $M_0(f) = 0$, ja

$$M_t(f) = \sum_{s=1}^{t} \big(f(X_s) - (Kf)(X_{s-1}) \big)$$

   on martingaali filtraatiossa $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{N}\})$ jossa $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s = 0, 1, \dots, t)$.

   (b) Laske Doobin martingaali hajotelma

$$f(X_t) = f(X_0) + M_t(f) + A_t(f)$$

   jossa $A_t(f)$ on ennustettava $\mathbb{F}$ suhteen, eli $\forall t \in \mathbb{N}$, $A_t(f)$ on $\mathcal{F}_{t-1}$-mitallinen.