HY Todennäköisyysteoria II, syksy 2013, laskuharjoitukset 12 (6.12.2013)

1. Kun $X(\omega), Y(\omega) \in L^2(P)$, niiden välinen kovarianssi on

   $$\mathrm{Cov}_P(X,Y) := E_P(XY) - E_P(X)E_P(Y) = E_P\big(\{X - E_P(X)\}\{Y - E_P(Y)\}\big)$$

   ja varianssi on $\mathrm{Var}_P(X) := \mathrm{Cov}_P(X,X)$.
   Olkoon $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega) \in L^2(P)$. Minkowski epäyhtälöstä seuraa $(X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)) \in L^2(P)$.
   Osoita

   $$\mathrm{Var}_P\big(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\big) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}_P(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{1\le j<i} \mathrm{Cov}_P(X_i, X_j)$$

2. Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon ali-σ-algebra $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.
   Olkoon $X(\omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sen ehdollinen varianssi on

   $$\mathrm{Var}(X|\mathcal{G})(\omega) := E_P(X^2|\mathcal{G})(\omega) - \big\{E_P(X|\mathcal{G})(\omega)\big\}^2 \ \geq 0$$

   jossa ei-negatiivisuus seuraa Jensenin epäyhtälöstä.

   (a) Osoita:

   $$\mathrm{Var}_P(X) = E_P\big(\ \mathrm{Var}(X|\mathcal{G})(\omega)\big) + \mathrm{Var}_P\big(E_P(X|\mathcal{G})(\omega)\big)$$

   (b) Olkoon myös $Y(\omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Määrittele ehdollisen kovarianssin $\mathrm{Cov}(X, Y|\mathcal{G})(\omega)$ ja esitä edellisen kaavan yleistys kovariansille.

3. Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $N(\omega)$ geometrinen satunnaismuuttuja, parametrilla $p \in (0,1)$,
   siis $P(N = k) = (1-p)^{k-1}p$ kun $k \in \mathbb{N}$, ja olkoon $\{X_k(\omega) :\ k \in \mathbb{N}\}$ P-riippumattomien ja samoin jakautuneiden satunnaismuuttujen jono, jossa P_{X_1} on standardi gaussinen jakauma $\mathcal{N}(0,1)$.

   Muistetaan että reaaliarvoisten satunnaismuuttujen kokoelman $\{X_j(\omega)\}_{j\in\mathcal{J}}$ virittämän σ-algebra

   $$\sigma\big(X_j(\omega) : j \in \mathcal{J}\big)$$

on pienin σ-algebra joka sisältää joukot

$$\{\omega : (X_{j_1}(\omega), X_{j_2}(\omega), \dots, X_{j_n}(\omega)) \in B_n\}$$

jossa $n \in \mathbb{N}$, $\{j_1, \dots j_n\} \subseteq \mathcal{J}$ on äärellinen indeksien alijoukko ja $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ on Borelin joukko.

Olkoon

$$Y(\omega) := \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega) \mathbf{1}(k \le N(\omega))$$

(a) Osoita että $Y(\omega)$ on satunnaismuuttuja.

(b) Laske ehdolliset odotusarvot

$$E_P(Y|\sigma(N))(\omega) \quad \text{ja} \quad E_P(Y|\sigma(X_k : k \in \mathbb{N}))(\omega),$$

ja osoita että nämä satunnaismuuttujat kuuluvat $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ avaruuteen.

(c) Laske ehdolliset odotusarvot

$$E_P(Y^2|\sigma(N))(\omega) \quad \text{ja} \quad E_P(Y^2|\sigma(X_k : k \in \mathbb{N}))(\omega),$$

ja osoita että nämä satunnaismuuttujat kuuluvat $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ avaruuteen.

(d) Laske odotusarvot $E_P(Y)$, $E_P(Y^2)$.

4. Osoita Fatou lemma ehdollisille odotusarvolle: jos $0 \le X_n(\omega)$,

$$0 \le E_P(\liminf X_n|\mathcal{G})(\omega) = \liminf_n E_P(X_n|\mathcal{G})(\omega)$$

5. Olkoon $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \dots, \xi_d(\omega)) \in \mathbb{R}^d$ Gaussinen satunnaisvektori jonka komponentit $\xi_k(\omega) \in \mathbb{R}$ P-riippumattomia ja samoin jakautuneita standardi-Gaussisia satunnaismuuttujat, joilla $E_P(\xi_k) = 0$ ja $E_P(\xi_k^2) = 1$, $\mu = (\mu_1, ;\mu_d) \in \mathbb{R}^d$, vakio vektori, ja $A = (A_{ij} : 0 \le i \le j \le d)$ vakio $d \times d$ matriisi.

   Olkoon $X(\omega) = (\mu + A\xi(\omega)^\top) \in \mathbb{R}^d$.

   Osoita: $E_P(X) = \mu$ ja $E_P(X_i X_j) - E_P(X_i)E_P(X_j) = \Sigma_{ij}$, jossa $\Sigma = AA^\top$.

Osoita että satunnaisvektorilla X on tiheysfunktio $\mathbb{R}^d$-Lebesgue mitan suhteen

$$p_X(x) = (2\pi)^{-d/2} \det(\Sigma)^{-1/2} \exp\bigl(-\frac{1}{2}(x-\mu)\Sigma^{-1}(x-\mu)^\top\bigr)$$

eli jos $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ on mitallinen rajoitettu testifunktio

$$E_P\Bigl(g(X)\Bigr) = E_P\bigl(g(\mu + A\xi^\top)\bigr) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} g\bigl(\mu_1 + \sum_{j=1}^d A_{1j}y_j, \dots, \mu_d + \sum_{j=1}^d A_{1j}y_j\bigr) \prod_{j=1}^d \Bigl\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-y_j^2/2) \Bigr\} dy_1 \dots dy_d =$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x_1, \dots, x_d) p_X(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d$$

Vihje Muuttujan vaihdolla $x = \mu + Ay^\top$.

6. Olkoon $(X, Y) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ yhteisesti Gaussisia satunnaisvektoreita, jolla $X(\omega) \in \mathbb{R}^{n_x}$ ja $Y(\omega) \in R^{n_y}$ kovarianssimatriisilla

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{xy}^\top & \Sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

Oletamme $E_P(X) = E_P(Y) = 0$ muuten voimme aina siirtyä käsittelemään satunnaisvektoreita $X' = (X - E(X))$ ja $Y' = (Y - E(Y))$.

Laske Bayesin' kaavalla tiheysfunktiot ehdollisilla jakaumille

$$p_{X|\ Y}(x|Y = y) \quad \text{ja} \quad p_{Y|X}(y|\ X = x)$$