

HY Todennäköisyysteoria II, syksy 2013, laskuharjoitukset 11 (27.11.2013)

1. Olkoon $X(\omega)$ Poisson(λ) jakautunut satunnaismuuttuja, $\lambda > 0$, ja $Y(\omega) := \mathbf{1}(X(\omega) > 0)$.

a Laske satunnaismuuttujan X ”elementaarinen” ehdollinen odotusarvo ehdolla tapahtumia $A = \{\omega : Y(\omega) = 1\}$ ja $A^c = \{\omega : Y(\omega) = 0\}$

$$E_P(X|Y = 1), \quad E_P(X|Y = 0) .$$

b Laske satunnaismuuttujan X ehdollinen odotusarvo ehdolla σ -algebraa $\sigma(Y)$

$$E_P(X|\sigma(Y))(\omega)$$

2. Olkoon $G_1(\omega)$ ja $G_2(\omega)$ riippumattomia standardi Gaussisia satunnaismuuttujat jolla

$$P(G_1 \leq x, G_2 \leq y) = P(G_1 \leq x)P(G_2 \leq y) = \Phi(x)\Phi(y),$$
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$$

Olkoon $M(\omega) = \max\{G_1(\omega), G_2(\omega)\}$.

a) Laske $E_P(M|\sigma(G_1))(\omega)$.

b) Laske $E_P(G_1|\sigma(M))(\omega)$.

Vihje Katso tehtävän 5) vihjeet.

3. Todennäköisyysavaruudessa (Ω, \mathcal{F}, P) , olkoon $X(\omega)$ satunnaismuuttuja jolla

a) $P(X \in dx) = \mathbf{1}(x \geq 0) \exp(-x)dx$, X on 1-eksponentiaalinen

b) $P(X \in dx) = \pi^{-1}(1+x^2)^{-1}dx$, X on Cauchy jakautunut.

Osoita:

tapauksessa **a)** $E_P(|X|) < \infty$,

ja tapauksessa **b)** $E_P(|X|) = \infty$.

4. Olkoon $Y(\omega) = \lfloor X(\omega) \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq X(\omega)\} \in \mathbb{Z}$.

Laske tapauksissa **3.a)** ja **3.b)** ehdollinen odotusarvo

$$E_P(X|\sigma(Y))(\omega) \in \mathbb{R}$$

Vihje Huomaat että σ -algebra $\sigma(Y)$ on numeroituvasti generoitu, eli on olemassa numeroituva \mathcal{F} -mitallinen ositus joka virittää σ -algebraa.

5. Olkoon $X(\omega)$ ja $Y(\omega)$ P riippumattomia ja tasaisesti jakautuneita välillä $[0, 1]$, siis

$$P(X \in dx, Y \in dy) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \mathbf{1}_{[0,1]}(y) dx dy$$

Olkoon $Z(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega))$ ja $I(\omega) = \mathbf{1}(X(\omega) \leq Y(\omega))$

- (a) Laske $P(X > Y)$.
 (b) Laske “elementaarinen” ehdollinen odotusarvon tapahtuman ehdolla

$$E_P(X|X > Y)$$

- (c) Laske ehdollinen odotusarvo

$$E_P(X|\sigma(I))(\omega)$$

- (d) Laske ehdollinen odotusarvo $E_P(X|\sigma(Z), I)(\omega)$.

Vihje Koska

$$Z(\omega)\mathbf{1}(X(\omega) > Y(\omega)) = Y(\omega)\mathbf{1}(X(\omega) > Y(\omega))$$

voit osoittaa ensin (Kolmogorovin määritelmän kautta)

$$\begin{aligned} & E_P(X|\sigma(Z), \sigma(I))(\omega) \mathbf{1}(X(\omega) > Y(\omega)) \\ &= E_P(X|\sigma(Y), \sigma(I))(\omega) \mathbf{1}(X(\omega) > Y(\omega)) \\ &= \frac{E_P(X\mathbf{1}(X > Y)|\sigma(Y))}{P(X > Y|\sigma(Y))(\omega)} \mathbf{1}(X(\omega) > Y(\omega)) \end{aligned}$$

Muistetaan että silloin kun X ja Y ovat P -riippumattomia,

$$E_P(f(X, Y)|\sigma(Y))(\omega) = E_P(f(X, y)) \Big|_{y=Y(\omega)}$$

Vihje Laske ensin $E_P(X|\sigma(Z, I))$, jossa $I(\omega) := \mathbf{1}(X(\omega) \leq Y(\omega))$ ja tietenkin $\sigma(Z, I) \supseteq \sigma(Z)$.

$$E_P(Z|\sigma(Z)) = E_P(E_P(X|\sigma(Z, I))|\sigma(Z))$$