HY Todennäköisyysteoria II, syksy 2013, laskuharjoitukset 10 (20.11.2013)

1. Matemaatiisessa rahoitusteoriassa on tapana mallittaa osakkeen arvo $S(\omega)$ hetkellä $t > 0$ log-normalisella jakaumalla, siis

$$S_t(\omega) = S_0 \exp\Big(\sigma\sqrt{t} G(\omega) - \frac{1}{2}\sigma^2 t \Big)$$

jossa $S_0 > 0$ on osakkeen arvo hetkellä 0 ja $G(\omega) \sim \mathcal{N}(0,1)$, eli P:n suhteen $G(\omega)$ on standardi gaussinen jolla

$$P(G \le x) = \int_{-\infty}^{x} \gamma(y)dy, \qquad \gamma(y) = \frac{\exp(-y^2/2)}{\sqrt{2\pi}}$$

Eurooppalainen optio on satunaissmuuttuja $H(\omega) = h(S_t(\omega))$, jossa $x \mapsto h(x)$ on mitallinen.

Option hinta hetkellä 0 on odotusarvo $c(t, S_0, \theta) := E_P(h(S_t))$ tietyn riskineutraali todennäköisyysmitan P suhteen.

(a) Oleta ensin että $x \mapsto h(x)$ on derivoituva ja osoita että $c(t, S_0, \sigma)$ on derivoituva parametrien t, S_0 ja σ:n suhteen, joillakin tasaisen integroivuuden oletuksilla.

(b) Osoita että $c(t, S_0, \sigma)$ on derivoituva parametrien t, S_0 ja σ:n suhteen, myös silloin $h(x)$ ei olisi derivoituva, joillakin tasaisen integroivuuden oletuksilla.

Vihjeet

$$\begin{aligned} c(t, S_0, \sigma) &= \int_{\mathbb{R}} h\big(\exp\big(\log S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma\sqrt{t} y\big)\big)\gamma(y)dy \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} h\big(\exp(x)\big)\ \gamma\big(x - \log S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 t\big)dx \end{aligned}$$

muuttujan vaihdolla $x = \log S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma y \sqrt{t}$.

Muista myös $\frac{d}{dx}\gamma(x) = -x\gamma(x)$.

(c) Laske $c(t, S_0, \sigma)$, $\frac{\partial c(t,S_0,\sigma)}{\partial t}$, $\frac{\partial c(t,S_0,\sigma)}{\partial S_0}$, $\frac{\partial c(t,S_0,\sigma)}{\partial \sigma}$,
silloin kun $h(x) = (x-K)^+$ ja $h(x) = (x-K)^-$, $K > 0$.

$\big(S_t(\omega) - K\big)^+$ kutsutaan eurooppalaiseksi osto-optioksi joka antaa oikeus mutta ei velvollisuutta ostaa yhden osakkeen maturiteetti hetkellä

t ennalta sovitulla hinnalla K. Jos markkinahinta $S(\omega)$ on maturiteetin hetkellä korkeampi kun K, option haltija lunastaa optionsa, ostaa osakkeen hinnalla K ja kun myy heti sen pois saa voittoa $\big(S_t(\omega)-K\big)^+$. Jos $S \leq K$, osto-optio on silloin arvoton,

Vastaavasti $\big(S_t(\omega)-K\big)^-$ kutsutaan eurooppalainen myyntioptioksi.Tämän option haltijalla on oikeus (mutta ei velvollisuus) myydä maturiteettin hetkellä t yhden osakkeen ennalta sovitulla hinnalla K.

2. Osoita että $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ varustettuna olennaisen supremum normilla on täydellinen.

$$\parallel X \parallel_\infty = P\text{-esssup}_\omega \big\{|X(\omega)|\big\} = \inf\big\{\ K \in \mathbb{R} : P(|X| > K) = 0\big\}$$

3. Osoita:

   (a) Kun $X, Y \in L^2(P)$,

   $$\parallel X + Y \parallel_2^2 + \parallel X - Y \parallel_2^2 = 2 \parallel X \parallel_2^2 + 2 \parallel Y \parallel_2^2 \qquad \text{(Suunnikkaan identiteetti)}$$

   (b)

   $$E_P(XY) = \frac{1}{4}\big(\parallel X + Y \parallel_2^2 - \parallel X - Y \parallel_2^2\big) \qquad \text{(Polarisaation identiteetti)}$$

   (c) Normi $\parallel x \parallel$ toteuttaa suunnikkaan identiteetti, jos ja vain jos polaarisaatio identitetti määrittele skalaari tulo (x, y) (bilineaarinen ja positiivinen) jolla $\parallel x \parallel^2 = (x, x)$.