HY Todennäköisyysteoria II, syksy 2013, laskuharjoitukset 7 (6.11.2013)

1. Osoita:

   Olkoon $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio $X(\omega), X_n(\omega)$ $\mathbb{R}^d$-arvoisia satunnaisvektorit jotka saavat Kun satunnaismuuttujen jono $X_n \stackrel{P}{\to} X$ (stokastisesti), siitä seuraa $f(X_n) \stackrel{P}{\to} f(X)$

   Vihje: jono $X_n \stackrel{P}{\to} X$ jos ja vain jos jokaisesta indeksien alijonosta n_k löytyy alijonon alijono $n_{k(\ell)}$ jolla $X_{n_{k(\ell)}}(\omega) \to X(\omega)$ P-melkein varmasti kun $\ell \to \infty$.

2. (Prattin lemma) Olkoon X_n, $Z_n, X, Z \in L^1(P) \forall n \in \mathbb{N}$ ja

   $$\begin{aligned} &X_n(\omega) \le Y_n(\omega) \le Z_n(\omega) \qquad P\text{-melkein varmasti} \\ &X_n \xrightarrow{P} X,\ Y_n \xrightarrow{P} Y,\ Z_n \xrightarrow{P} Z, \quad \text{kun } n \to \infty \end{aligned}$$

   stokastisen konvergenssin mielessä, ja

   $$E_P(X_n) \to E_P(X), \quad E_P(Z_n) \to E_P(Z), \quad \text{kun } n \to \infty$$

   Osoita :

   $$E_P(Y_n) \to E_P(Y) \text{ kun } n \to \infty$$

   Vihje Koska $Y(\omega) = (Y(\omega)^+ - Y(\omega)^-)$ voidaan osoittaa erikseen että $E_P(Y_n^\pm) \to E_P(Y^\pm)$ ja olettaa että kaikki satunnaismuuttujat ovat ei-negatiivisia. Käytä sitten Fubinin lausetta

   $$E_P(Y_n) - E_P(Y) = \int_0^\infty \big\{P(Y_n > t) - P(Y > t)\big\} dt =$$
   $$\int_0^K \big\{P(Y_n > t) - P(Y > t)\big\} dt + \int_K^\infty \big\{\ P(Y_n > t) - P(Y > t)\big\} dt$$

   jossa

   $$\int_K^\infty P(X_n > t) dt \le \int_K^\infty P(Y_n > t) dt \le \int_K^\infty P(Z_n > t) dt$$

3. Keksi fuktio $f(x) \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) \setminus L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ jossa $\lambda(dx) = dx$ on Lebesguen mitta, eli

   $$\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 dx < \infty \quad \text{ja} \quad \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = \infty$$

   Miksi selläinen esimerkki ei ole ristiriidassa Jensenin epäyhtälön kanssa ?

4. (a) Osoita : kun $x \in \mathbb{R}$, kuvaus $x \mapsto f(x) = |x|^p$ on konveksi jos ja vain jos $p \geq 1$.
   (b) Osoita että jos $g : R^d \to \mathbb{R}$ on konveksi ja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on konveksi ja ei-vähenevä, myös komposiitio $f(g(x))$ on konveksi.
   (c) Osoita että $x \mapsto |x|^p$ on konveksi jos ja vain jos $p \geq 1$ myös Eukliidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^d$ jossa $|x| = \left(\sum_{i=1}^d x_i^2 \right)^{1/2}$.

5. Olkoon $G(\omega)$ standardi Gaussinen satunnaismuuttuja, jolla

$$P(G \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{2} \right) dy = \int_{-\infty}^{x} \gamma(y) dy$$

jossa $\gamma(y)$ on G:n tiheysfunktio, ja olkoon

$$f(x) = \int_0^x \partial f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}$$

jossa oletamme $\partial f(G(\omega)) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, eli

$$\int_{\mathbb{R}} \big| \partial f(y) \big| \gamma(y) dy < \infty$$

Osoita:

   (a) $\frac{\partial}{\partial x} \gamma(x) = -x\gamma(x)$
   (b) $f(G)G \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ **Vihje** Käytä Fubinin lause.
   (c) Gaussinen osittaisintegrointikaava pätee

$$E_P\big(\partial f(G)\big) = E_P\big(f(G)G\big) \quad \text{eli}$$
$$\int_{\mathbb{R}} \partial f(x) \gamma(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) x \gamma(x) dx$$