HY Todennäköisyysteoria II, syksy 2013, laskuharjoitukset 7 (6.11.2013)

1. Olkoon

$$L^0(\Omega, \mathcal{F}, P) = \Big\{ X : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \text{ mitallinen } \Big\} \Big/ \sim$$

jossa samaistetaan satunnaismuuttujat $X \sim Y$ silloin kun $P(\{\omega : X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1$. Tämä on metrinen avaruus (mutta ei ole normiavaruus) metriikalla

$$d(X,Y) = d(X - Y, 0) = E_P\left(\frac{|X - Y|}{1 + |X - Y|} \right)$$

On osoitettu luennolla että $d(\cdot, \cdot)$ metriikka virittää stokastisen konvergenssiin topologia, eli

$$X_n \stackrel{P}{\to} X \iff d(X_n, X) \to 0$$

Seuraavissa tehtävissä osoitamme että $L^0(P)$ on **täydellinen** stokastisen konvergenssin suhteen.

Sanotaan että jono $(X_n(\omega))$ on **stokastisesti Cauchy** kun $\forall \delta, \varepsilon > 0$ on olemassa N jolla kaikille $m, n \geq N$

$$P\big(\omega : |X_n(\omega) - X_m(\omega)| \geq \delta\big) < \varepsilon$$

(a) Osoita että kun $X_n \stackrel{P}{\to} X$, jono (X_n) on stokastisesti Cauchy.

(b) Oletamme nyt että jono (X_n) on stokastisesti Cauchy. Osoita että on olemassa indeksien alijono (n_k) jolla P-melkein varmasti $(X_{n_k}(\omega))$ on Cauchy jono .

(c) Osoita että jos jono (X_n) on stokastisesti Cauchy, on olemassa satunnaismuuttuja $X(\omega)$ jolla $X_n \stackrel{P}{\to} X$.
Vihje: Kokeile $X(\omega) := \limsup_k X_{n_k}(\omega)$, jossa (n_k) on edellisen tehtävän alijono.

2. Osoita seuraava Chebychevin epäyhtälön muunnelma: $\forall p > 1$

$$E_P\big(|X| \mathbf{1}(|X| > K)\big) \leq E_P(|X|^p) K^{1-p}$$

3. Olkoon N Poisson jakautunut parametrilla $\lambda > 0$, eli

$$P_\lambda(N = k) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}$$

Poissonin jakauman momentti generoiva funktio on

$$\psi_\lambda(s) = E_\lambda\big(\exp(sN)\big) = \exp(-\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\big(\lambda\exp(s)\big)^k}{k!} = \exp\Big(\lambda(\exp(s) - 1)\Big)$$

Laske $E_\lambda(N)$, $E_\lambda(N^2)$.

Vihje Laske momentti generoiva funktion derivaatat $\frac{\partial^k}{\partial t^k}\phi_\lambda(t)$ pisteessaa $t = 0$, $k = 1, 2$. Perustele derivoinnin ja integroinnin järjestyksen vaihto.

4. Olkoon $G(\omega)$ standardi Gaussinen satunnaismuuttuja jolla on

$$P(G \le x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\Big(-\frac{y^2}{2}\Big)dy$$

ja momentti generoiva funktio

$$\phi(t) = E_P\big(\exp(tG)\big) = \exp\Big(\frac{t^2}{2}\Big)$$

Olkoon $N(\omega)$ Poisson jakautunut satunnaismuuttuja parametrilla $\lambda > 0$:

$$P_\lambda(N = k) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Oletamme että G ja N ovat P-riippumattomia.

(a) Laske satunnaismuuttujan $N(\omega)G(\omega)$ momentti-generoiva funktio

$$E_P(\exp(tNG))$$

Vihje Käytä Fubinin lausetta kun integroi tulo avaruudessa. Valitse integroinnin järjestystä.

(b) Olkoon

$$X(t, \omega) = \Big(\frac{t^2}{2}\Big)^{N(\omega)}$$

Sen m-kertainen derivaatta on

$$X^{(m)}(t,\omega) =$$
$$\begin{cases} 2^{-N}\frac{d^m}{dt^m}\Big(t^{2N(\omega)}\Big) = 2N(2N-1)\dots(2N-m+1)t^{2N-m}2^{-N}, & m \le 2N \\ 0 & m > 2N \end{cases}$$

Osoita että $X^{(m)}(t,\omega) \in L^1(P)\ \forall t$.

(c) Osoita että löytyy väli $(a,b) \ni t$, jolla

$$\{\ X^{(m)}(s,\omega) : s \in (a,b)\} \text{ on tasaisesti integroituva .}$$

Vihje esitä integroituva yläraja.

(d) Osoita

$$\frac{d^m}{dt^m}E_P\big(\exp(tG)\big) = \frac{d^m}{dt^m}\exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = \frac{d^m}{dt^m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{2^k k!} =$$
$$\exp(1)\frac{d^m}{dt^m}E_P\left(\left(t^2/2\right)^N\right) = \exp(1)E_P\left(\frac{d^m}{dt^m}\left\{\left(\frac{t^2}{2}\right)^N\right\}\right) =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^m}{dt^m}\frac{t^{2k}}{2^k k!}$$

perustelemalla derivoinnin ja integroinnin järjestyksen vaihtoa.

(e) Osoita

$$E_P(G^{2n}) = \frac{(2n)!}{n!2^n}, \quad E_P(G^{2n+1}) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Vihje Laske Gaussisen momentti generoiva funktion $2n$-kertainen derivaatta pisteessä $t = 0$.