HY Todennäköisyysteoria II, syksy 2013, laskuharjoitukset 7 (6.11.2013)

1. Osoita:

   Olkoon $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio $X(\omega), X_n(\omega)$ $\mathbb{R}^d$-arvoisia satunnaisvektorit jotka saavat Kun satunnaismuuttujen jono $X_n \stackrel{P}{\to} X$ (stokastisesti), siitä seuraa $f(X_n) \stackrel{P}{\to} f(X)$

   Vihje: jono $X_n \stackrel{P}{\to} X$ jos ja vain jos jokaisesta indeksien alijonosta n_k löytyy alijonon alijono $n_{k(\ell)}$ jolla $X_{n_{k(\ell)}}(\omega) \to X(\omega)$ P-melkein varmasti kun $\ell \to \infty$.

   R.

   $||\cdot||$ on jokin $\mathbb{R}^d$:n normi, esimerkiksi

   $$||x||_\infty := \max\{|x^1|, \ldots, |x^d|\}.$$

   Koska $X_n \stackrel{P}{\to} X$, niin lauseen 6.0.1. kohdan 3 nojalla on olemassa alijono $(X_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$, jolle $X_{n_{k_l}} \stackrel{mv}{\to} X$. Jos ω kuluu suppenemisjoukkoon, niin $\forall$ $\delta > 0$ $\exists$ $N \in \mathbb{N}$ s.e.

   $$||X_{n_{k_l}}(\omega) - X(\omega)|| < \delta,$$

   kun $l \geq N$. f on jatkuva: $\forall$ $\epsilon > 0$ $\exists$ $\delta > 0$ s.e.

   $$|f(x) - f(y)| < \epsilon,$$

   kun $|x - y| < \delta$. Valitsemalla $l \geq N$, on $|f(X_{n_{k_l}}(\omega)) - f(X(\omega))| < \epsilon$ ja samassa pisteessä ω, $f(X_{n_{k_l}}(\omega)) \to f(X(\omega))$. Koska kaikkien näiden ω mitta on 1, niin $f(X_{n_{k_l}}) \stackrel{mv}{\to} f(X)$. $f(X_{n_{k_l}})$ on mielivaltaisen alijonon alijono, joka suppenee mv, josta soveltamalla lauseen 6.0.1 karakterisaatiota 3 uudelleen saadaan väite jonolle $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

2. (Prattin lemma) Olkoon X_n, $Z_n, X, Z \in L^1(P) \forall n \in \mathbb{N}$ ja

   $$X_n(\omega) \leq Y_n(\omega) \leq Z_n(\omega) \qquad P\text{-melkein varmasti}$$
   $$X_n \xrightarrow{P} X,\ Y_n \xrightarrow{P} Y,\ Z_n \xrightarrow{P} Z,\ \text{ kun } n \to \infty$$

   stokastisen konvergenssin mielessä, ja

   $$E_P(X_n) \to E_P(X), \quad E_P(Z_n) \to E_P(Z),\ \text{ kun } n \to \infty$$

   Osoita :

   $$E_P(Y_n) \to E_P(Y) \text{ kun } n \to \infty$$

Vihje Koska $Y(\omega) = (Y(\omega)^+ - Y(\omega)^-)$ voidaan osoittaa erikseen että $E_P(Y_n^\pm) \to E_P(Y^\pm)$ ja olettaa että kaikki satunnaismuuttujat ovat ei-negatiivisia. Käytä sitten Fubinin lausetta

$$E_P(Y_n) - E_P(Y) = \int_0^\infty \big\{P(Y_n > t) - P(Y > t)\big\}dt =$$

$$\int_0^K \big\{P(Y_n > t) - P(Y > t)\big\}dt + \int_K^\infty \big\{ P(Y_n > t) - P(Y > t)\big\}dt$$

jossa

$$\int_K^\infty P(X_n > t)dt \le \int_K^\infty P(Y_n > t)dt \le \int_K^\infty P(Z_n > t)dt$$

R

Oletuksesta $0 \le Y_n - X_n \le Z_n - X_n$ mv. Koska $Z_n \xrightarrow{P} Z$ ja $X_n \xrightarrow{P} X$, niin $Z_n - X_n \xrightarrow{P} Z - X$.

$(Z_n - X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on tasaisesti integroituva, jos $Z_n - X_n \xrightarrow{L^1} Z - X$. Se seuraa oletuksista $E(X_n) \to E(X)$ ja $E(Z_n) \to E(Z)$:

$$E|Z_n - X_n| = E(Z_n - X_n) \to E(Z - X) = E|Z - X|.$$

Teoreema 7.0.2 $\Rightarrow$ $(Z_n - X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on TI.

Koska

$$|Y_n - X_n| \le \sup_n |Z_n - X_n| \in L^1(P).$$

Lemma 7.0.1 $\Rightarrow$ $(Y_n - X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ TI.

Oletuksesta seuraa, että $Y_n - X_n \xrightarrow{P} Y - X$ ja koska myös TI, niin lauseesta 7.0.2 $\Rightarrow$ L^1-konvergenssi:

$$E|Y_n - X_n| \to E|Y - X|,$$

ja

$$\begin{aligned}
\lim_n E|Y_n - X_n| &= \lim_n E(Y_n - X_n) \\
&= \lim_n E(Y_n) - \lim_n E(X_n) \\
&= \lim_n E(Y_n) - E(X) \\
&= E|Y - X| = E(Y - X) = E(Y) - E(X).
\end{aligned}$$

3. Keksi fuktio $f(x) \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) \setminus L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ jossa $\lambda(dx) = dx$ on Lebesguen mitta, eli

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 dx < \infty \quad \text{ja} \quad \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = \infty$$

Miksi selläinen esimerkki ei ole ristiriidassa Jensenin epäyhtälön kanssa ?

R

Otetaan mitta-avaruudeksi $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(R), \lambda)$, missä λ Lebesque $\mathbb{R}$:llä. Ilman mitään rajoituksia, Jensen ey:ssä on mahdollista tapaus $\infty < M$, missä $M < \infty$. Se pitää rajoittaa pois.

Jos $f(x) := x^{-1}\mathbf{1}_{x>1}$ ja $g(x) := x^2$, niin g on konveksi ja Jensen kirjoitetaan

$$g\left(\int_{\mathbb{R}} f d\lambda\right) \leq \int_{\mathbb{R}} (g \circ f) d\lambda.$$

Vasen puoli ei ole integroituva:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f| d\lambda = \int_1^{\infty} x^{-1} dx = \infty,$$

mutta

$$\int_{\mathbb{R}} (g \circ f) d\lambda = \int_1^{\infty} x^{-2} dx < \infty.$$

$(f \in L^2(\lambda) \setminus L^1(\lambda))$

Tämä ei ole ristiriidassa Jensenin kanssa, koska siinä rajoitetaan integroituvuusoletuksella

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f| d\lambda < \infty$$

Tällaiset tapaukset pois. Sama oletus on luennoissa muodossa $E|X| < \infty$.

4. (a) Osoita : kun $x \in \mathbb{R}$, kuvaus $x \mapsto f(x) = |x|^p$ on konveksi jos ja vain jos $p \geq 1$.
   (b) Osoita että jos $g : R^d \to \mathbb{R}$ on konveksi ja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on konveksi ja ei-vähenevä, myös komposiitio $f(g(x))$ on konveksi.

(c) Osoita että $x \mapsto |x|^p$ on konveksi jos ja vain jos $p \geq 1$ myös Eukliidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^d$ jossa $|x| = \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2\right)^{1/2}$.

R

- f, g konvekseja:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$
$$g(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda g(\mathbf{x}) + (1-\lambda)g(\mathbf{y}),$$

missä $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$.

$$\begin{aligned} & f(g(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y})) \leq \\ & f(\lambda g(\mathbf{x}) + (1-\lambda)g(\mathbf{y})) && \text{konveksisuus, } f \text{ kasvava} \\ & \leq \lambda f(g(\mathbf{x})) + (1-\lambda)f(g(\mathbf{y})) \end{aligned}$$

- MIlle tahansa normille $|| \cdot ||$ $\mathbb{R}^d$:ssä (myös $| \cdot |$ kun $d = 1$), kolmioepäyhtälöstä ja ominaisuudesta $||\lambda \mathbf{x}||_2 = |\lambda| ||\mathbf{x}||_2$ seuraa

$$||\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}||_2 \leq \lambda ||\mathbf{x}||_2 + (1-\lambda)||\mathbf{y}||_2.$$

- $f(x) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ $f(x) = x^p$ on konveksi, kasvava:

$$f''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0,$$

kun $p > 1$.

$$(\frac{x}{y})^p > 1 \Leftrightarrow x > y,$$

kun $p > 0$.

5. Olkoon $G(\omega)$ standardi Gaussinen satunnaismuuttuja, jolla

$$P(G \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = \int_{-\infty}^{x} \gamma(y) dy$$

jossa $\gamma(y)$ on G:n tiheysfunktio, ja olkoon

$$f(x) = \int_0^x \partial f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}$$

jossa oletamme $\partial f(G(\omega)) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, eli

$$\int_{\mathbb{R}} \big|\partial f(y)\big| \gamma(y) dy < \infty$$

Osoita:

(a) $\frac{\partial}{\partial x}\gamma(x) = -x\gamma(x)$
R.

$$\gamma'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}(-\frac{1}{2}2x) = -x\gamma(x).$$

(b) $f(G)G \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ **Vihje** Käytä Fubinin lause.
R.

$$\begin{aligned}
E(|f(G)G|) &= \int_\Omega |f(G)G| P(d\omega) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)x|\gamma(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |x \int_0^y \partial f(s)ds|\gamma(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |x \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{(0,y)}(s)\partial f(s)ds|\gamma(x)dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x| \int_{-\infty}^{\infty} |\partial f(s)|ds\gamma(x)dx \\
&\overset{Fub}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |x|\gamma(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} |\partial f(s)|ds < \infty,
\end{aligned}$$

jälkimmäinen oletuksesta, ja edellinen koska Gaussisella jakaumalla on odotusarvo. Positiivisuus sallii integrointijärjestyksen vaihtamisen.

(c) Gaussinen osittaisintegrointikaava pätee

$$\begin{aligned}
&E_P\big(\partial f(G)\big) = E_P\big(f(G)G\big) \quad \text{eli} \\
&\int_\mathbb{R} \partial f(x)\gamma(x)dx = \int_\mathbb{R} f(x)x\gamma(x)dx
\end{aligned}$$

R. Osittaisintegroimalla:

$$\begin{aligned}
E(\partial f(G)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \partial f(x)\gamma(x)dx \\
&= \Big/_{-\infty}^{\infty} f(x)\gamma(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\gamma'(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\gamma(x)dx \\
&= E(Gf(G)).
\end{aligned}$$