HY Todennäköisyysteoria II, syksy 2013, laskuharjoitukset 7 (6.11.2013)

1. Olkoon

$$L^0(\Omega,\mathcal{F},P) = \big\{ X : (\Omega,\mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R})) \text{ mitallinen } \big\} \Big/ \sim$$

jossa samaistetaan satunnaismuuttujat $X \sim Y$ silloin kun $P(\{\omega : X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1$. Tämä on metrinen avaruus (mutta ei ole normiavaruus) metriikalla

$$d(X,Y) = d(X-Y,0) = E_P\left(\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|} \right)$$

On osoitettu luennolla että $d(\cdot,\cdot)$ metriikka virittää stokastisen konvergenssiin topologia, eli

$$X_n \xrightarrow{P} X \iff d(X_n,X) \to 0$$

Seuraavissa tehtävissä osoitamme että $L^0(P)$ on **täydellinen** stokastisen konvergenssin suhteen.

Sanotaan että jono $(X_n(\omega))$ on **stokastisesti Cauchy** kun $\forall \delta,\varepsilon > 0$ on olemassa N jolla kaikille $m,n \geq N$

$$P\big(\omega : |X_n(\omega) - X_m(\omega)| \geq \delta\big) < \varepsilon$$

(a) Osoita että kun $X_n \xrightarrow{P} X$, jono (X_n) on stokastisesti Cauchy.
R. Kolmio epäyhtälöstä :

$$|X_n(\omega) - X_m(\omega)| \leq |X_n(\omega) - X(\omega)| + |X_n(\omega) - X(\omega)|$$

Muistetaan että $X_n \xrightarrow{P} X$ jos ja vain jos $E_P(|X_n - X| \wedge 1) \to 0$.

$$E_P(|X_n - X_m| \wedge 1) \leq E_P((|X_n - X| + |X - X_m|) \wedge 1)$$
$$\leq E_P((|X_n - X| \wedge 1) + E_P(|X - X_m|) \wedge 1) \to 0$$

kun $n,m \to \infty$,
Chebychevin epäyhtälöstä seuraa kun $0 < \varepsilon \leq 1$

$$P(|X_n - X_m| > \varepsilon) \leq E_P(|X_n - X_m| \wedge 1)/\varepsilon \to 0$$

Tai, jos haluaa tehdä tämän suoraan stokastisen konvergenssin määritelmästä: Kolmioepäyhtälöstä

$$\begin{aligned}
&\{\omega : |X_n - X| < \frac{\epsilon}{2}, |X_m - X| < \frac{\epsilon}{2}\} \\
&= \{\omega : |X_n - X| < \frac{\epsilon}{2}\} \bigcap \{\omega : |X_m - X| < \frac{\epsilon}{2}\} \\
&\subseteq \{\omega : |X_m - X_n| < \epsilon\}
\end{aligned}$$

Ottamalla komplemetit $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\{\omega : |X_n - X| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \bigcup \{\omega : |X_m - X| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \\
\supseteq \{\omega : |X_m - X_n| \geq \epsilon\}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$P(|X_m - X_n| \geq \epsilon) \leq P(|X_n - X| \geq \frac{\epsilon}{2}) + P(|X_n - X| \geq \frac{\epsilon}{2}),$$

missä oikea puoli $\to 0$.

(b) Oletamme nyt että jono (X_n) on stokastisesti Cauchy. Osoita että on olemassa indeksien alijono (n_k) jolla P-melkein varmasti $(X_{n_k}(\omega))$ on Cauchy jono .

R

Pieni tulos Elfving-Tuomisesta. Sarja $S = \sum_{k=1}^{\infty} X_k$ suppenee, jos sen kaikkien osasummien

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

jono suppenee melkein varmasti kohti (äärellistä) raja-sm. Riittävä ehto, että osasummien jono suppenee on: jos $\epsilon_k > 0, \forall k$, $\sum_k^{\infty} \epsilon_k < \infty$ ja

$$\sum_k^{\infty} P(|X_k| > \epsilon_k) < \infty. \tag{0.1}$$

Tod: Borel-Cantelli1 ja ehdosta (0.1) seuraa, että

$$P(\lim_n \sup_{k \geq n} \{\omega : |X_k| > \epsilon_k\}) = 0.$$

$$\begin{aligned}
&\omega \in (\lim_n \sup_{k \geq n} \{\omega : |X_k| > \epsilon_k\})^c && \Leftrightarrow \\
&\omega \in \lim_n \inf_{k \geq n} \{\omega : |X_k| \leq \epsilon_k\} && \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$\exists N \in \mathbb{N}$ s.e. $|X_k(\omega)| \leq \epsilon_k$ jokaisella $k \geq N \Rightarrow$

$$\sum_k^{\infty} |X_k(\omega)| \leq \sum_k^{\infty} \epsilon_k < \infty. \quad \square$$

Jono (X_n) on stokastisesti Cauchy: $\forall \delta, \epsilon > 0 \; \exists \; N \in \mathbb{N}$ s.e.

$$P(|X_n - X_m| \geq \delta) < \epsilon \quad ; m, n > N.$$

Voidaan valita osajono (X_{n_k}), jolle

$$P(|X_{n_{k+1}} - X_{n_k}| \geq 2^{-k}) < 2^{-k}.$$

Käyttämällä edellistä tulosta arvolla $\epsilon_k = 2^{-k}$ saadaan, että osasummien jono

$$X_{n_l} = S_l = X_{n_1} + (X_{n_2} - X_{n_1}) + \ldots + (X_{n_l} - X_{n_{l-1}})$$

suppenee mv. Jokaisella ω, jolla $\lim X_{n_k}(\omega)$ on olemassa on $(X_{n_k}(\omega))$ reaalilukujen Cauchy jono $\Rightarrow$ $(X_{n_k}(\omega))$ on mv Cauchy.

(c) Osoita että jos jono (X_n) on stokastisesti Cauchy, on olemassa satunnaismuuttuja $X(\omega)$ jolla $X_n \xrightarrow{P} X$.
Vihje: Kokeile $X(\omega) := \limsup_k X_{n_k}(\omega)$, jossa (n_k) on edellisen tehtävän alijono.
R
Osoitetaan, että edellisen kohdan alijonon raja-arvo $\limsup_k X_{n_k}(\omega)$ on koko jonon raja-arvo.
Koska $X_{n_k}(\omega) \overset{mv}{\to} X := \limsup_k X_{n_k}(\omega)$, niin $X_{n_k}(\omega) \xrightarrow{P} X$. Eli $\exists N \in \mathbb{N}$ s.e.

$$P(|X_{n_k} - X| > \frac{\delta}{2}) < \frac{\epsilon}{2} \quad ; k \geq N.$$

Pääjono on stokastisesti Cauchy:

$$P(|X_n - X_m| > \frac{\delta}{2}) < \frac{\epsilon}{2} \quad ; n, m \geq N'$$

Kolmioepäyhtälöstä

$$P(|X_n - X| > \delta) \leq P(|X_n - X_{n_k}| > \frac{\delta}{2}) + P(|X_{n_k} - X| > \frac{\delta}{2}),$$

kun $k \geq N$ on sellainen, että $n_k \geq N'$.

2. Osoita seuraava Chebychevin epäyhtälön muunnelma: $\forall p > 1$

$$E_P\big(|X|\mathbf{1}(|X| > K)\big) \leq E_P(|X|^p)K^{1-p}$$

R.

$$\begin{aligned} E(|X|\mathbf{1}_{\{|X|>K\}}) &= E(\frac{|X|^p}{|X|^{p-1}}\mathbf{1}_{\{|X|>K\}}) \\ &\leq E(\frac{|X|^p}{K^{p-1}}\mathbf{1}_{\{|X|>K\}}) \\ &\leq E(\frac{|X|^p}{K^{p-1}}) \end{aligned}$$

Jos $p = 1$, niin yhtälöstä

$$\begin{aligned} E(|X|) &= E(|X|\mathbf{1}_{\{|X|>K\}} + |X|\mathbf{1}_{\{|X|\leq K\}}) \\ &\geq E(|X|\mathbf{1}_{\{|X|>K\}}), \end{aligned}$$

eli pitäisi toimia, kun $p \geq 1$.

Olkoon $(X_n : n \in \mathbb{N})$ satunnaismuuttujen jono jolla

$$\sup_n E_P\big(|X_n|^p\big) < \infty$$

jollekin $p > 1$.

Osoita että $(X_n : n \in \mathbb{N})$ on tasaisesti integroituva.

R.

a)-kohta $\Rightarrow$

$$E(|X_n|\mathbf{1}_{\{|X_n|>K\}}) \leq K^{1-p}E|X_n|^p$$

$\Rightarrow$

$$\sup_n E(|X_n|\mathbf{1}_{\{|X_n|>K\}} \leq K^{1-p}\sup_n E|X_n|^p \to 0,$$

oletuksesta, kun $K \to \infty$ silloin kun $p > 1$.

3. Olkoon N Poisson jakautunut parametrilla $\lambda > 0$, eli

$$P_\lambda(N = k) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}$$

Poissonin jakauman momentti generoiva funktio on

$$\psi_\lambda(s) = E_\lambda\big(\exp(sN)\big) = \exp(-\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\big(\lambda\exp(s)\big)^k}{k!} = \exp\Big(\lambda(\exp(s) - 1)\Big)$$

Laske $E_\lambda(N)$, $E_\lambda(N^2)$.

Vihje Laske momentti generoiva funktion derivaatat $\frac{\partial^k}{\partial t^k}\phi_\lambda(t)$ pisteessaa $t=0$, $k=1,2$. Perustele derivoinnin ja integroinnin järjestyksen vaihto.

R.

Merk $\partial_s := \frac{\partial}{\partial s}$.

$$\begin{aligned}\partial_s\psi_\lambda(s) &= \partial_s E(e^{sN}) \stackrel{?}{=} E(\partial_s(e^{sN})) \\ &= E(Ne^{sN}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_s^2\psi_\lambda(s) &= \partial_s^2 E(e^{sN}) \stackrel{?}{=} E(\partial_s^2(e^{sN})) \\ &= E(N^2e^{sN}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\partial_s\psi_\lambda(s)|_{s=0} = e^{\lambda(e^s-1)}\cdot\lambda e^s|_{s=0} = \lambda \\ &\partial_s^2\psi_\lambda(s)|_{s=0} = \lambda(e^{\lambda(e^s-1)}\lambda e^s\cdot e^s + e^{\lambda(e^s-1)}e^s)|_{s=0} = \lambda(\lambda+1).\end{aligned}$$

Integroinnin ja derivoinnin jarjestyksen vaihto, eli poistetaan kysymysmerkit yllä: Tarkoitus on päästä soveltamaan luentojen lausetta 8.0.3. Ensiksi tasainen integroituvuus on varmistettava.

Matkimalla luentojen esimerkkiä 8.0.2 dominoidaan derivaattaa Ne^{sN} e^{aN}:n avulla, missä a on joku kiinteä luku. e^{aN} on integroituva (mgf). Tästä seuraa derivaatan tasainen integroituvuus (sopivalla välillä).

Rajoitetaan $s\in(-a,a)$ (nollan kuuluttava välille, jos halutaan derivoida pisteessä 0). Ratkaistaan, millä N:n arvoilla $Ne^{sN}\le e^{aN}$: Koska

$$Ne^{-|s|N} < Ne^{|s|N},$$

voidaan ratkaista ey s:n positivisilla arvoilla:

$$\begin{aligned} n_0e^{sn_0} &\le e^{an_0} && \Leftrightarrow \\ n_0 &\le e^{(a-s)n_0} && \Leftrightarrow \\ \frac{\log n_0}{n_0} &\le a-s. \end{aligned}$$

kuvaus $\frac{\log n_0}{n_0}$ on n_0:n suhteen vähenevä (kunhan $n_0 > 1$. Arvoilla $n_0 = 0, 1$ ey on voimassa) $\Rightarrow \frac{\log n}{n} \leq a - s$, kun $n \geq n_0$. $\Rightarrow ne^{sn} \leq e^{an}$, kun $n \geq n_0$.

Nyt

$$\begin{aligned} Ne^{sN} &= Ne^{sN}\mathbf{1}_{\{N<n_0\}} + Ne^{sN}\mathbf{1}_{\{N\geq n_0\}} \\ &\leq n_0 e^{sn_0}\mathbf{1}_{\{N<n_0\}} + e^{aN}\mathbf{1}_{\{N\geq n_0\}}, \end{aligned}$$

ja vimeisen lausekkeen odotusarvo $\leq C + E(e^{aN}) \leq C + e^{e^a(\lambda-1)} < \infty$. Derivaatalla Ne^{sN} on mv dominoiva, integroituva sm jokaisella $s \in (-a, a)$. Tekemällä sama arvio välille $(-a', a')$, missä $a' > a$, saadan derivaatta dominoiduksi suljetulla välillä $[-a, a]$. Mistä seuraa tasainen integroituvuus perhelle $(Ne^{sN})_{s\in[-a,a]}$.

Koska $\exp(\cdot)$ on jatkuva, mitallisuus (sekä s:n, että ω:n suhteen) on selviä. Lisäksi sekä $s \mapsto E(e^{sN})$, että $s \mapsto Ne^{sN}$ ovat jatkuvia ja lauseen 8.0.3 mukaan derivaatan ja odotusarvon järjestys voidaan vaihtaa.

4. Olkoon $G(\omega)$ standardi Gaussinen satunnaismuuttuja jolla on

$$P(G \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$$

ja momentti generoiva funktio

$$\phi(t) = E_P\big(\exp(tG)\big) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

Olkoon $N(\omega)$ Poisson jakautunut satunnaismuuttuja parametrilla $\lambda > 0$:

$$P_\lambda(N = k) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Oletamme että G ja N ovat P-riippumattomia.

(a) Laske satunnaismuuttujan $N(\omega)G(\omega)$ momentti-generoiva funktio

$$E_P(\exp(tNG))$$

Vihje Käytä Fubinin lausetta kun integroi tulo avaruudessa. Valitse integroinnin järjestystä.

Ratkaisu

Pitää laskea odotusarvo $E(e^{tNG})$ tulokentässä $(\Omega_1 \times \Omega_2, \cdot, P_\lambda \otimes P_G)$.

$$\begin{aligned}
E(e^{tNG}) &= \int_\Omega e^{tN(\omega_1)G(\omega_2)} d(P_\lambda \otimes P_G)(\omega_1 \times \omega_2) \\
&\overset{rippumattomuus}{=} \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} e^{tN(\omega_1)G(\omega_2)} dP_\lambda(\omega_1) dP_G(\omega_2) \\
&\overset{Fub}{=} \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} e^{tN(\omega_1)G(\omega_2)} dP_G(\omega_2) dP_\lambda(\omega_1).
\end{aligned}$$

Tai odotusarvoin

$$E_G(E_{P_\lambda}(e^{tNG})) = E_{P_\lambda}(E_G(e^{tNG})).$$

Koska integrandi on positiivinen, kummassakin järjestyksessä lasketut integraalit joko suppenevat tai hajaantuvat yhdessä, järjestyksen vaihto on sallittu.
Poisson jakauman mgf:stä

$$E_{P_\lambda}(e^{tNG}) = e^{\lambda(e^{tG}-1)},$$

ja

$$E_G(E_{P_\lambda}(e^{tNG})) = C \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda(e^{tx}-1)} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

mikä hajaantuu (e^{tx} kasvaa nopeammin kuin $-\frac{x^2}{2}$, josta seuraa, että integrandi $\to \infty$, kun $x \to \infty \Rightarrow$ integraali hajaantuu.) Toisinpäin laskemalla

$$E_{P_G}(e^{tNG}) = e^{\frac{(tN)^2}{2}}$$

ja

$$\begin{aligned}
E_{P_\lambda}(E_G(e^{tNG})) &= E_{P_\lambda}(e^{\frac{(tN)^2}{2}}) \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{(tk)^2}{2}} \frac{\lambda^k}{k!},
\end{aligned}$$

joka myöskin hajaantuu. Mutta

$$E_{P_G}(e^{t\sqrt{N}G}) = e^{\frac{t^2 N}{2}}$$

ja

$$
\begin{aligned}
E_{P_\lambda}(E_G(e^{t\sqrt{N}G})) &= E_{P_\lambda}(e^{\frac{t^2 N}{2}}) \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{t^2 k}{2}}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{\frac{t^2}{2}})^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{\frac{t^2}{2}}}
\end{aligned}
$$

(b) Olkoon

$$
X(t,\omega) = \left(\frac{t^2}{2}\right)^{N(\omega)}
$$

Sen m-kertainen derivaatta on

$$
X^{(m)}(t,\omega) =
\begin{cases}
2^{-N}\frac{d^m}{dt^m}\left(t^{2N(\omega)}\right) = 2N(2N-1)\dots(2N-m+1)t^{2N-m}2^{-N}, & m \le 2N \\
0 & m > 2N
\end{cases}
$$

Osoita että $X^{(m)}(t,\omega) \in L^1(P)\ \forall t$.
R.

Käytän Cauchy-Schwartzia muutaman integraalin arvioimiseen. Se ei vielä ole ollut luennoilla, joten pikamääritelmä.
Sisätuloavaruudessa X on sisätulolle (x,y) voimassa arvio

$$
(x,y)^2 \le ||x||\ ||y||,
$$

missä $||\cdot||$ on avaruuden normi. L^1 ei ole sisätuloavaruus, mutta L^2 on, ja sama yhtälö L^2:ssa on

$$
(E|XY|)^2 \le E|X|^2 E|Y|^2.
$$

L^2 on satunnaismuuttujien avaruus, jossa $E_P(|X|^2) < \infty$.
Merk $\partial_t^{(m)} := \frac{\partial^m}{\partial t^m}$.

$$
\partial_t^{(m)} X = \partial_t^{(m)}\left(\frac{t^2}{2}\right)^N = 2N(2N-1)\dots(2N-m+1)t^{2N-m}2^{-N},
$$

josta

$$|\partial_t^{(m)} X| \leq 2^{-N}(2N)^{m+2}|t|^{2N-m}. \tag{0.2}$$

Pitää tarkistaa integroituvuus jokaisella t. Jos $m > N$, kaikki on nollassa.

- $|t| \leq 1$.
  Yhtälöstä (0.2):

  $$|\partial_t^{(m)} X| \leq 2^{-N}(2N)^{m+2}$$

  mv ja Cauchy-Schwartz $\Rightarrow$

  $$E|\partial_t^{(m)} X| \leq \left(E|2^{-N}|^2 E|(2N)^{m+2}|^2\right)^{1/2}.$$

  Ensimmäiselle oikealla puolella olevalle odotusarvolle:

  $$\begin{aligned} E|2^{-N}|^2 = E(2^{-N})^2 &= E(\frac{1}{4})^N \\ &= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{4})^k\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda}e^{\lambda/4} < \infty. \end{aligned}$$

  Toiselle:

  $$E|(2N)^{m+2}|^2 = 2^{2m+4}EN^{2m+4},$$

  missä $(2m+4)$:s Poisson momentti on λ:n $(2m+4)$ asteen polynomi, mika on $< \infty$, kun $\lambda < \infty$.
- $|t| > 1$. Yhtälöstä (0.2)

  $$|\partial_t^{(m)} X| \leq |t|^{-m}\left(\frac{t^2}{2}\right)^N (2N)^{m+2},$$

  ja CS $\Rightarrow$

  $$E|\partial_t^{(m)} X| \leq \left[|t|^{-m} E\left(\left(\frac{t^2}{2}\right)^N\right)^2 E\left((2N)^{m+2}\right)^2\right]^{1/2}$$

  Oikealla puolella oleva jälkimmäinen odotusarvo on $< \infty$. Edellinen on

  $$\begin{aligned} E\left(\left(\frac{t^2}{2}\right)^N\right)^2 &= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{t^4}{4})^k\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda}e^{\lambda t^4/4} < \infty. \end{aligned}$$

Eli jokaisella $|t| > 1$

$$E|\partial_t^{(m)} X| < \infty.$$

Jos haluaa, voi vielä kirjoittaa koko odotusarvolle

$$\begin{aligned} E|\partial_t^{(m)} X| =& \mathbf{1}_{(|t|\leq 1)} E(|\partial_t^{(m)} X| \mathbf{1}_{\{2N\geq m\}} + |\partial_t^{(m)} X| \mathbf{1}_{\{2N<m\}}) + \\ & \mathbf{1}_{(|t|>1)} E(|\partial_t^{(m)} X| \mathbf{1}_{\{2N\geq m\}} + |\partial_t^{(m)} X| \mathbf{1}_{\{2N<m\}}) \end{aligned}$$

ja sijoittaa siihen edelliset arviot.

(c) Osoita että löytyy väli $(a,b) \ni t$, jolla

$$\{\ X^{(m)}(s,\omega) : s \in (a,b)\} \text{ on tasaisesti integroituva .}$$

Vihje esitä integroituva yläraja.

R.

Edellisestä, esimerkiksi väli $(-1,1)$ käy. Perheelle

$$(\partial_t^{(m)} X)_{t\in(-1,1)}$$

löytyi integroituva yläraja

$$\sup_{t\in(-1,1)} |\partial_t^{(m)} X| \leq 2^{-N}(2N)^{m+2}$$

ja luentojen lemman 7.0.1 nojalla perhe on TI.

(d) Osoita

$$\frac{d^m}{dt^m} E_P\big(\exp(tG)\big) = \frac{d^m}{dt^m} \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = \frac{d^m}{dt^m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!} =$$
$$\exp(1) \frac{d^m}{dt^m} E_P\left(\big(t^2/2\big)^N\right) = \exp(1) E_P\left(\frac{d^m}{dt^m}\left\{\left(\frac{t^2}{2}\right)^N\right\}\right) =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^m}{dt^m} \frac{t^{2k}}{2^k k!}$$

perustelemalla derivoinnin ja integroinnin järjestyksen vaihtoa.

R.

Ensimmäinen "=" on Gaussinen mgf, toinen eksponenttifunktion sarjakehitelmä. Viimeinen on itseisesti suppenevan sarjan derivointi termeittäin.

Kolmas "=" seuraa siitä, että

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!} = e \sum_{k=0}^{\infty} e^{-1} (\frac{t^2}{2})^k \frac{1}{k!} = e E_{\lambda=1} \Big((t^2/2)^N \Big)$$

Neljäs "=", integroinnin ja derivoinnin järjestyksen vaihdon oikeutus seuraa luentojen lauseesta 8.0.3. Lauseen ehdot on täytettävä:

- Jotta derivaattaa voi integroida, sen on oltava mitallinen. Lauseen mukaan se on $(m \otimes P)(dt \times d\omega)$ (m Lebesque) mitallinen, jos derivaatat ovat ovat $\mathcal{F}$ mitallisia jokaisella t ja derivaatat ovat jatkuvia t:n suhteen. Derivaatan jatkuvuus t:n suhteen on selvä $X^{(m)}$:n lausekkeesta. Derivaatta on $\mathcal{F}$ mitallinen $\forall t$ koska se on jatkuva muunnos mitallisesta satunnaismuuttujasta N.
- Edellisessä kohdassa on todettu sekä, että $X^{(m)}(t, \omega)$ on integroituva jokaisella t, että $\sup_t X^{(m)}(t, \omega)$ on dominoitu jollain välillä $t \in (a, b) \ni 0$, mistä seuraa perheen $X^{(m)}(t, \omega)_{t \in (a,b)}$ TI.

Nyt voidaan soveltaa lausetta viemällä derivaatta kerrallaan odotusarvojen sisään.

(e) Osoita

$$E_P(G^{2n}) = \frac{(2n)!}{n! 2^n}, \quad E_P(G^{2n+1}) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Vihje Laske Gaussisen momentti generoiva funktion $2n$-kertainen derivaatta pisteessä $t = 0$.

R.

Edellisestä

$$E(G^{2n}) = \frac{\partial^{2n}}{\partial t^{2n}} (E e^{tG}) \Big|_{t=0} = \frac{\partial^{2n}}{\partial t^{2n}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!} \right) \Big|_{t=0}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^{2n}}{\partial t^{2n}} \left(\frac{t^{2k}}{2^k k!} \right) \Big|_{t=0}$$

Kun $2n < 2k$ on

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial t^{2n}} t^{2k} = 2k(2k-1) \cdot \ldots \cdot (2k - 2n + 1) t^{2k-2n}|_{t=0} = 0.$$

Kun $2n > 2k$ on

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial t^{2n}} t^{2k} = 0.$$

Kun $2n = 2k$ on

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial t^{2n}} t^{2n} = 2n!$$

ja

$$E(G^{2n}) = 2n! \frac{1}{2^n n!}.$$

$$2k < 2n+1 : \qquad \frac{\partial^{2n+1}}{\partial t^{2n+1}} t^{2k} = 0$$

$$2k > 2n+1 : \qquad \frac{\partial^{2n+1}}{\partial t^{2n+1}} t^{2k}|_{t=0} = 0,$$

josta toinen yhtälö.