HY Todennäköisyysteoria II, syksy 2013, laskuharjoitukset 13 (11.12.2013)

1. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ali σ-algebra ja $I(\omega)$ satunnaismuuttuja jolla $P\big(\{\ I(\omega) \in \mathbb{N}\}\big) = 1$.

   $\mathcal{G} \vee \sigma(I)$ on pienin σ-algebra joka sisältää $\mathcal{G}$ ja jonka suhteen $I : \Omega \to \mathbb{R}$ on mitallinen.

   Osoita:

   $$E_P\big(X\big|\mathcal{G} \vee \sigma(I)\big)(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}(I(\omega) = n) E_P\big(X\big|\mathcal{G}, I = n\big)(\omega) :=$$

   $$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}(I(\omega) = n) \frac{E_P\big(X\mathbf{1}(I = n)\big|\mathcal{G}\big)(\omega)}{P\big(I = n\big|\mathcal{G}\big)(\omega)}$$

   jossa

   $$E_P\big(X\big|\mathcal{G}, I = n\big)(\omega) := \frac{E_P\big(X\mathbf{1}(I = n)\big|\mathcal{G}\big)(\omega)}{P\big(I = n\big|\mathcal{G}\big)(\omega)}$$

   saa mielivaltainen arvo joukossa $\big\{\omega : P\big(I = n\big|\mathcal{G}\big)(\omega) = 0\big\}$.

   Vihje Joukot $\{\omega : I(\omega) = n\}$, $n \in \mathbb{N}$ ja $\{\omega : I(\omega) \notin \mathbb{N}\}$ muodostuvat todennäköisyysavaruuden mitallisen osituksen. Käytä ehdollisen odotusarvon määritelmää.

   R.

   Jokainen $C \in \mathcal{G} \vee \sigma(I)$ voidaan esittää leikkauksena $C = A \cap B$, $A \in \mathcal{G}$, $B \in \sigma(I)$ ja joukot $(I = m)$ muodostavat osituksen. Voidaan ottaa testijoukoksi $C = A \cap (I = m)$, $A \in \mathcal{G}$.

   $$\begin{aligned}
E(\mathbf{1}_C E(X|\mathcal{G} \vee \sigma(I)) &= E\left(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{(I=m)} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{E(X\mathbf{1}_{(I=n)}|\mathcal{G})}{E(\mathbf{1}_{(I=n)}|\mathcal{G})} \mathbf{1}_{(I=n)}\right) \\
&= E\left(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{(I=m)} \frac{E(X\mathbf{1}_{(I=m)}|\mathcal{G})}{E(\mathbf{1}_{(I=m)}|\mathcal{G})}\right) \\
&= E\left(E\left(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{(I=m)} \frac{E(X\mathbf{1}_{(I=m)}|\mathcal{G})}{E(\mathbf{1}_{(I=m)}|\mathcal{G})}\Big|\mathcal{G}\right)\right) \\
&= E\left(\mathbf{1}_A E(\mathbf{1}_{(I=m)}|\mathcal{G}) \frac{E(X\mathbf{1}_{(I=m)}|\mathcal{G})}{E(\mathbf{1}_{(I=m)}|\mathcal{G})}\right) \\
&= E\left(\mathbf{1}_A E(X\mathbf{1}_{(I=m)}|\mathcal{G})\right) \\
&= E\left(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{(I=m)} X\right) = E\left(\mathbf{1}_C X\right)
\end{aligned}$$

(Huom: Tässä on jätetty mekitsemättä osituksen nollajoukko ($I \notin \mathbb{N}$). Samoin on surutta käsitelty ääretöntä summaa. Ks harjoitus 11 tehtävä 4.)

2. (Heikko suurten lukujen laki) Olkoon $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq L^2(P)$ satunnaismuuttujen jono joilla $E(X_n) = 0$

$$E_P(X_n^2) \leq c < \infty \; \forall n \quad , \quad E_P(X_n X_m) = 0 \quad \text{kun } n \neq m$$

(siis $(X_n : n \in \mathbb{N})$ ovat korrelaatiomattomia).

Merkitään $S_n(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_n(\omega)$ ja otoksen keskiarvo $\overline{S}_n(\omega) = n^{-1} S_n(\omega)$.

(a) Osoita: $\overline{S}_n \to 0$ $L^2(P)$-mielessä ja stokastisesti kun $n \uparrow \infty$.

(b) Osoita: kun $E_P(X_n) = \mu \; \forall n$, osoita että $\overline{S}_n \to \mu$ $L^2(P)$-mielessä ja stokastisesti.

Vihje Laske $E_P(\overline{S}_n^2)$.

R.

(a)

$$E_P(\overline{S}_n^2) = \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{i=1}^n E_P(X_i^2) + \sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq j < i} E_P(X_i X_j)\right\} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n E_P(X_i^2) \leq \frac{c}{n}$$

Stokastinen konvergenssi seuraa L^2-konvergenssista $\square$

(b)

$$\begin{aligned}
E_P(\overline{S}_n - \mu)^2 &= E_P\left(n^{-1}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right) \\
&= E_P\left(n^{-2}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 - \mu^2\right) \\
&= E_P\left(n^{-2}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 + 2\sum_{j<k} X_j X_k\right)\right) - \mu^2 \\
&= n^{-2}\sum_{k=1}^{n} E(X_k^2) + 2n^{-2}\left(\frac{1}{2}n^2 - n\right)\mu^2 - \mu^2 \\
&= n^{-2}\sum_{k=1}^{n} E(X_k^2) + \mu^2 - 2n^{-1}\mu^2 - \mu^2 \\
&\leq n^{-1}c - 2n^{-1}\mu^2 \to 0.
\end{aligned}$$

3. Olkoon $(X_t : t \in \mathbb{N}) \subseteq L^1(P)$ P-riippumattomia satunnaismuuttujat jolla $E(X_t) = 0$, (vastaavasti ≤ 0, ≥ 0) ja $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_t)$.

   Silloin $M_t = (X_1 + \cdots + X_t)$ on $(\mathcal{F}_t)$-martingaali (vastaavasti ylimartingaali, alimartingaali).

   R.

   Pitää tarkistaa, että M_t toteuttaa (ali-, yli) martingaalin määritelmän:

   - Jokaiselle $k = 0, \ldots, t-1$ on X_{t-k} $\mathcal{F}_t$-mitallinen, joten M_t on myös.
   - $M_t \in L^1$: Induktiolla, $M_1 \in L^1$. Jos $M_t \in L^1$, niin

     $$E|M_{t+1}| = E|M_t + X_{t+1}| \leq E|M_t| + E|X_{t+1}| < \infty.$$

     (M_∞:stä ei väitetä mitään)
   - $$\begin{aligned}
E(M_t|\mathcal{F}_{t-1}) &= E(X_1 + \ldots + X_t|\mathcal{F}_{t-1}) \\
&= X_1 + \ldots + X_{t-1} + E(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) \\
&\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} M_{t-1} + E(X_t).
\end{aligned}$$

   Jos $E(X_t) = 0$, on M_t martingaali, ali- (yli-) martingaali, jos $E(X_t) > 0$ ($E(X_t) < 0$).

4. Olkoon $(X_t : t \in \mathbb{N}) \subseteq L^1(P)$ P-rippumattomia satunnaismuuttujat jolla $E(X_t) = 1$, (vastaavasti ≤ 1, ≥ 1) ja $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_t)$. Silloin $M_t = (X_1 \times \cdots \times X_t)$ on $(\mathcal{F}_t)$-martingaali (vastaavasti ylimartingaali, alimartingaali).

   R.

   Pitää tarkistaa, että M_t toteuttaa (ali-, yli) martingaalin määritelmän:

   - Jokaiselle $k = 0, \ldots, t-1$ on X_{t-k} $\mathcal{F}_t$-mitallinen, joten M_t on myös.
   - $M_t \in L^1$: Induktiolla, $E|M_1| = E|X_1| < \infty$. Jos $M_t \in L^1$, niin

     $$E|M_{t+1}| = E|M_t||X_{t+1}| \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} E|M_t|E|X_{t+1}| < \infty.$$

   - $$\begin{aligned} E(M_t|\mathcal{F}_{t-1}) &= E(X_1 \ldots X_t|\mathcal{F}_{t-1}) \\ &= X_1 \ldots X_{t-1} E(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) \\ &\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} M_{t-1}E(X_t). \end{aligned}$$

     Jos $E(X_t) = 1$, on M_t martingaali, ali- (yli-) martingaali, jos $E(X_t) > 1$ ($E(X_t) < 1$).

   (TÄmä ei pysy integroituvana kovin pitkään. Jos oletetaan, että $X_t \geq 0$ mv, niin $E|M_t| = E(X_1) \ldots E(X_t) = 1$ ja voidaan mennä rajalle, jos on tarpeen.)

5. Olkoon $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{N})$ $\mathbb{R}^d$-arvoinent Markovin ketju jolla on alkujakauma $P(X_0 \in B) = \pi(B)$ ja siirtymä ydin $K(B, x)$ joka on todennäköisyysydin. Tässä $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ja $x \in \mathbb{R}^d$.

   Se tarkoittaa että $\forall t$, $B_0, B_1, \ldots, B_t \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

   $$P(X_0 \in B_0, X_1 \in B_1, \ldots, X_t \in B_t) = \\ \int_{B_0} \int_{B_1} \int_{B_2} \cdots \int_{B_t} K(dx_t, x_{t-1}) \ldots K(dx_2, x_1) K(dx_1, x_0) \pi(dx_0)$$

   Määritellään operaattori

   $$(Kf)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) K(y, dx) = E_x(f(X_1))$$

(a) Osoita että kun $f(x)$ on mitallinen ja rajoitettu, olkoon $M_0(f) = 0$, ja

$$M_t(f) = \sum_{s=1}^{t} \big(f(X_s) - (Kf)(X_{s-1}) \big)$$

on martingaali filtraatiossa $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{N}\})$ jossa $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s = 0, 1, \ldots, t)$.

(b) Laske Doobin martingaali hajotelma

$$f(X_t) = f(X_0) + M_t(f) + A_t(f)$$

jossa $A_t(f)$ on ennustettava $\mathbb{F}$ suhteen, eli $\forall t \in \mathbb{N}$, $A_t(f)$ on $\mathcal{F}_{t-1}$-mitallinen.

R.

Ytimen määritelmä:

Määritelmä 0.1. $(\Omega_1,\ \mathcal{F}_1)$ *ja* $(\Omega_2,\ \mathcal{F}_2)$ *mitta-avaruuksia. Kuvaus* $K(\omega_1, A) : \Omega_1 \times\ \mathcal{F}_2 \to [0, 1]$ *on TN ydin, jos*

- *kiinteällä* $A \in \mathcal{F}_2$, $K(\cdot, A)$ *on* $\mathcal{F}_1$*-mitallinen.*
- *kiinteällä* $\omega_1 \in \Omega_1$, $K(\omega_1, \cdot)$ *on TN-mitta* $\mathcal{F}_2$*:lla.*

Jos $f : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ on $\mathcal{F}_2$ mitallinen ja rajoitettu, niin monotonisen luokan lauseesta seuraa, että $(Kf)(\omega_1)$ on $\mathcal{F}_1$ mitallinen: Jos $A \in \mathcal{F}_2$, niin

$$\begin{aligned}(K\mathbf{1}_A)(\omega_1) &= \int_{\Omega_2} \mathbf{1}_A(\omega_2) K(\omega_1, d\omega_2) \\ &= K(\omega_1, A),\end{aligned}$$

mikä on määritelmän mukaan $\mathcal{F}_1$-mitallinen. $\Rightarrow$ yksinkertaisille, ei-negatiivisille f, $(Kf)(\omega_1)$ on $\mathcal{F}_1$-mitallisia $\overset{MK}{\Rightarrow}$ rajoitetuille positiivisille f, (Kf) on $\mathcal{F}_1$-mitallinen. Ja kirjoittamalla $f = f^+ - f^-$, (Kf) on $\mathcal{F}_1$-mitallinen kaikille rajoitetuille, mitallisille f (Ks myös lause 11.4.1).

Asettamalla $\Omega_1 = \mathbb{R}^d = \Omega_2$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, on (Kf) mitallinen $\Rightarrow$ $(Kf)(X_t)$ $\mathcal{F}_t$ mitallinen ($\mathcal{F}_t := \sigma(X_s), s \le t$). Lisäksi, jos f on rajoitettu $||f|| \le M$ jokaisella x, on $|(Kf)| \le M$ ja $E|(Kf)| \le M$.

Tulkinta: siirtymäydin on säännöllinen versio ehdollisesta todennäköisyydestä $K(x, A) = P(X_{t+1} \in A | X_t = x)$ ja $(Kf)(x)$ on $f(X_{t+1})$ ehdollinen odotusarvo ehdolla $X_t = x$.

(a)

$$
\begin{aligned}
M_t(f) &= \sum_{s=1}^{t-1}\big(f(X_s) - (Kf)(X_{s-1})\big) + f(X_t) - (Kf)(X_{t-1}) \\
&= M_{t-1}(f) + f(X_t) - (Kf)(X_{t-1})
\end{aligned}
$$

$M_{t-1}(f)$:n termit ovat kaikki $\mathcal{F}_{t-1}$-mitallisia, ja $(Kf)(X_{t-1})$ lauseen 11.4.1 mukaan versio ehdollisesta odotusarvosta $E(f(X_t)|\mathcal{F}_{t-1})(\omega)$,

$$
\begin{aligned}
E(M_t(f)|\mathcal{F}_{t-1}) &= M_{t-1}(f) + E(f(X_t) - (Kf)(X_{t-1})|\mathcal{F}_{t-1}) \\
&= M_{t-1}(f)
\end{aligned}
$$

(b) Todennäköisyyskenttä $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, jolla historia $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1} \subseteq \mathcal{F}$. Jos X_n on $\mathbb{F}$-sopiva, niin sillä on yksikäsitteinen hajotelma

$$X_t = X_0 + M_n + A_n,$$

missä M_n on $\mathbb{F}$ martingaali $M_0 = A_0 = 0$, ja A_n on ennustettava, $\mathcal{F}_{n-1}$-mitallinen.
Kirjoittamalla

$$
\begin{aligned}
X_n - X_{n-1} &= X_n - X_{n-1} + E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) - E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) \\
&= (X_n - E(X_n|\mathcal{F}_{n-1})) + (E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1}) := \Delta M_n + \Delta A_n
\end{aligned}
$$

Jälkimmäinen termi on $\mathcal{F}_{n-1}$-mitallinen ja edellisen ehdollinen odotuarvo $\mathcal{F}_{n-1}$:n suhteen $=0$ ja

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} \Delta M_n + \sum_{k=1}^{n} \Delta A_n := X_0 + M_n + A_n.$$

Samoin:

$$
\begin{aligned}
f(X_t) &= f(X_0) + \sum_{s=1}^{t}(f(X_s) - f(X_{s-1}) \\
&= f(X_0) + \sum_{s=1}^{t}(f(X_s) - Kf(X_{s-1}) + \sum_{s=1}^{t}((Kf)(X_{s-1}) - f(X_{s-1})) \\
&= f(X_0) + M_t(f) + A_t(f)
\end{aligned}
$$