HY Todennäköisyysteoria II, syksy 2013, laskuharjoitukset 12 (6.12.2013)

1. Kun $X(\omega), Y(\omega) \in L^2(P)$, niiden välinen kovarianssi on

   $$\mathrm{Cov}_P(X,Y) := E_P(XY) - E_P(X)E_P(Y) = E_P\big(\{X - E_P(X)\}\{Y - E_P(Y)\}\big)$$

   ja varianssi on $\mathrm{Var}_P(X) := \mathrm{Cov}_P(X,X)$.

   Olkoon $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega) \in L^2(P)$. Minkowski epäyhtälöstä seuraa $(X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)) \in L^2(P)$.

   Osoita

   $$\mathrm{Var}_P\big(X_1 + X_2 + \dots + X_n\big) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}_P(X_i) + 2\sum_{i=1}^n \sum_{1 \le j < i} \mathrm{Cov}_P(X_i, X_j)$$

   R. Huomataan ensin että kun $c \in \mathbb{R}$ (vakio) $\mathrm{Var}(X + c) = \mathrm{Var}(X)$ koska

   $$E_P((X+c)^2) - \{E_P(X+c)\}^2 = E_P(X^2) + c^2 + 2cE_P(X) - \big\{E_P(X)^2 + c^2 + 2cE_P(X)\big\}$$

   Voidaan olettaa $E_P(X_i) = 0$ $i = 1, \dots, n$, silloin $\mathrm{Cov}_P(X_i, X_j) = E_P(X_i X_j)$

   $$E_P\left(\left\{\sum_{i=1}^n X_i\right\}^2\right) = E_P\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 + 2\sum_{i=1}\sum_{1 \le j < i} X_i X_j\right) =$$

   $$\sum_{i=1}^n E_P(X_i^2) + 2\sum_{i=1}\sum_{1 \le j < i} E_P(X_i X_j)$$

2. Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon ali-σ-algebra $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.

   Olkoon $X(\omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sen ehdollinen varianssi on

   $$\mathrm{Var}(X|\mathcal{G})(\omega) := E_P(X^2|\mathcal{G})(\omega) - \big\{E_P(X|\mathcal{G})(\omega)\big\}^2 \ge 0$$

   jossa ei-negatiivisuus seuraa Jensenin epäyhtälöstä.

   (a) Osoita:

   $$\mathrm{Var}_P(X) = E_P\big(\mathrm{Var}(X|\mathcal{G})(\omega)\big) + \mathrm{Var}_P\big(E_P(X|\mathcal{G})(\omega)\big)$$

   R.

$$E_P(X^2) - \big\{E_P(X)\big\}^2 = E_P\big(E_P(X^2|\mathcal{G})\big) - \big\{E_P\big(E_P(X|\mathcal{G})\big)\big\}^2 =$$
$$E_P\big(E_P(X^2|\mathcal{G})\big) - E_P\big(E_P(X|\mathcal{G})^2\big) + E_P\big(E_P(X|\mathcal{G})^2\big) - \big\{E_P\big(E_P(X|\mathcal{G})\big)\big\}^2 =$$
$$= E_P\big(E_P(X^2|\mathcal{G}) - E_P(X|\mathcal{G})^2\big) + E_P\big(E_P(X|\mathcal{G})^2\big) - \big\{E_P\big(E_P(X|\mathcal{G})\big)\big\}^2$$

(b) Olkoon myös $Y(\omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Määrittele ehdollisen kovarianssin $\mathrm{Cov}(X, Y|\mathcal{G})(\omega)$ ja esitä edellisen kaavan yleistys kovariansille.

R.

Kuten ehdollinen varianssi

$$Var(X|\mathcal{G}) = E\left[(X - E(X|\mathcal{G}))^2\middle|\mathcal{G}\right],$$

määritellään

$$\begin{aligned}
Cov(X, Y|\mathcal{G}) &:= E\left[(X - E(X|\mathcal{G}))(Y - E(Y|\mathcal{G}))\middle|\mathcal{G}\right] \\
&= E\left[XY + E(X|\mathcal{G})E(Y|\mathcal{G}) - XE(Y|\mathcal{G}) - YE(X|\mathcal{G})\middle|\mathcal{G}\right] \\
&= E(XY|\mathcal{G}) + E(X|\mathcal{G})E(Y|\mathcal{G}) - 2E(X|\mathcal{G})E(Y|\mathcal{G}) \\
&= E(XY|\mathcal{G}) - E(X|\mathcal{G})E(Y|\mathcal{G})
\end{aligned}$$

Väite:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\big(\ \mathrm{Cov}(X, Y|\mathcal{G})\big) + \mathrm{Cov}\big(E(X|\mathcal{G}), E(Y|\mathcal{G})\big).$$

$$\begin{aligned}
E\left[Cov(X, Y|\mathcal{G})\right] &= E\left[E(XY|\mathcal{G}) - E(X|\mathcal{G})E(Y|\mathcal{G})\right] \\
&= E(XY) - E\left[E(X|\mathcal{G})E(Y|\mathcal{G})\right]. \qquad (0.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\big(E(X|\mathcal{G}), E(Y|\mathcal{G})\big) &= E\left[E(X|\mathcal{G})E(Y|\mathcal{G}) - E(E(X|\mathcal{G}))E(E(Y|\mathcal{G}))\right] \\
&= E\left[E(X|\mathcal{G})E(Y|\mathcal{G})\right] - E(X)E(Y) \qquad (0.2)
\end{aligned}$$

Laskemalla (0.1) ja (0.2) yhteen saadaan väitteen vasen puoli.

3. Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $N(\omega)$ geometrinen satunnaismuuttuja, parametrilla $p \in (0,1)$,

siis $P(N = k) = (1-p)^{k-1}p$ kun $k \in \mathbb{N}$, ja olkoon $\{X_k(\omega) : \ k \in \mathbb{N}\}$ P-riippumattomien ja samoin jakautuneiden satunnaismuuttujen jono, jossa P_{X_1} on standardi gaussinen jakauma $\mathcal{N}(0,1)$.

Muistetaan että reaaliarvoisten satunnaismuuttujen kokoelman $\{X_j(\omega)\}_{j\in\mathcal{J}}$ virittämän σ-algebra

$$\sigma\big(X_j(\omega) : j \in \mathcal{J}\big)$$

on pienin σ-algebra joka sisältää joukot

$$\{\omega : (X_{j_1}(\omega), X_{j_2}(\omega), \dots, X_{j_n}(\omega)) \in B_n\}$$

jossa $n \in \mathbb{N}$, $\{j_1, \dots j_n\} \subseteq \mathcal{J}$ on äärellinen indeksien alijoukko ja $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ on Borelin joukko.

Olkoon

$$Y(\omega) := \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega)\mathbf{1}(k \le N(\omega))$$

(a) Osoita että $Y(\omega)$ on satunnaismuuttuja.
R. Olkoon

$$Y_n(\omega) := \sum_{k=1}^{\min(n,N(\omega))} X_k(\omega) = \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega)\mathbf{1}(k \le N(\omega))$$

Osoitamme: $\{Y_n(\omega)\}$ on Cauchy jono $L^2(P)$:ssa.

$$E_P\Bigg(\bigg\{\sum_{k=1}^{n} X_k\mathbf{1}(k \le N)\bigg\}^2\Bigg) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} E_P\big(X_k^2\mathbf{1}(k \le N)\big) + 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\le h<k} E_P\big(X_k X_h \mathbf{1}(k \le N)\mathbf{1}(h \le N)\big)$$

$$\sum_{k=1}^{n} E_P(X_k^2)P(k \le N) + 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\le h<k} E_P\big(X_k)E_P(X_h)P(k \le N) = \sum_{k=1}^{n}(1-p)^{k-1} =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(1-p)^k \le \sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k = (1-(1-p))^{-1} = p^{-1} < \infty \text{ (geometrinen sarja)}$$

riipumattomuuden nojalla ja koska $E(X_k) = 0$ $E(X_k^2) = 1$.

Koska sarja suppenee seuraa että $E_P((Y_n - Y_m)^2) < \varepsilon$ kun n, m ovat tarpeeksi suuria. Koska $L2(P)$ on täydellinen avaruus, seuraa että on olemassa $Y(\omega) \in L^2(P)$ jolle $E_P((Y_n - Y)^2) \to 0$ kun $n \uparrow \infty$. Jensenin epäyhtälöstä seuraa $E_P(|Y_n - Y|) \to 0$ ja myös $Y_n \xrightarrow{P} Y$ (stokastisesti).

Osoitamme sen lisääksi että $Y_n(\omega) \to Y(\omega)$ P-melkein varmasti: Fubinin lauseesta

$$E_P\left(\sum_{k=1}^{\infty} |X_k| \mathbf{1}(N \geq k)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} E_P\big(|X_k| \mathbf{1}(N \geq k)\big) = E_P(|X_1|) \sum_{k=1}^{\infty} P(N \geq k)$$

$$= E_P(|X_1|) \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} = E_P(|X_1|) E_P(N) = E_P(|X_1|)\, p^{-1} < \infty$$

Tästä seuraa

$$\sum_{k=1}^{\infty} |X_k(\omega)| \mathbf{1}(N(\omega) \geq k) < \infty$$

P-melkein varmasti ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega) \mathbf{1}(N(\omega) \geq k) < \infty$$

jossa sarja suppenee absoluuttisesti P-melkein varmasti.

Osoittaaksen että rajarvo $L^1(P)$ mielessä ja rajarvo P-melkein varma rajarvo täsmäävät, todistamme seuraavan pienen lemman:

Lemma: Jos $Y_n(\omega) \to Y(\omega)$ $L^1(P)$ mielessä ja $Y_n(\omega) \to \widetilde{Y}(\omega)$ P-melkein varmasti, seuraa $Y(\omega) = \widetilde{Y}(\omega)$ P-melkein varmasti.

Tod. Koska $E_P(|Y_n - Y|) \to 0$, $L^1(P)$ konvergenssin karkaterisoinnista seuraa että $\{Y_n\} \subseteq L^1(P)$ on tasaisesti integroituva. Koska $\{Y_n\}$ on tasaisesti integroituva ja $Y_n(\omega) \to \widetilde{Y}(\omega)$ P-melkein varmasti, seuraa samasta lauseesta että $E_P(|Y_n - \widetilde{Y}|) \to 0$. Kolmion epäyhtälöstä

$$E_P(|Y - \widetilde{Y}|) \leq E_P(|Y_n - \widetilde{Y}|) + E_P(|Y_n - Y|) \to 0$$

siis $E_P(|Y - \widetilde{Y}|) = 0 \iff Y(\omega) = \widetilde{Y}(\omega)$ P-melkein varmasti $\square$.

(b) Laske ehdolliset odotusarvot

$$E_P(Y|\sigma(N))(\omega) \quad \text{ja} \quad E_P(Y|\sigma(X_k : k \in \mathbb{N}))(\omega),$$

ja osoita että nämä satunnaismuuttujat kuuluvat $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ avaruuteen.

R. Voidaan kirjoittaa

$$Y(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} |X_k(\omega)| \mathbf{1}(N(\omega) \geq k) = \Phi((X_k(\omega)), N(\omega))$$

jossa $\Phi : (\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}) \to \mathbb{R}^+$ on mitallinen kuvaus.

$$E_P\big(Y\big|\sigma(N)\big)(\omega) = E_P\big(\Phi((X_k), N)\big|\sigma(N)\big)(\omega) = E_P\big(\Phi((X_k), n)\big)\Big|_{n=N(\omega)}$$

$$= E_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\Bigg|_{n=N(\omega)} = \left\{\sum_{k=1}^{n} E_P(X_k)\right\}\Bigg|_{n=N(\omega)} = 0$$

$$E_P\big(Y\big|\sigma(X_k : k \in \mathbb{N})\big)(\omega) = E_P\big(\Phi((X_k), N)\big|\sigma(X_k : k \in \mathbb{N})\big)(\omega)$$

$$= E_P\big(\Phi((x_k), N)\big)\Big|_{(x_k)=(X_k(\omega))} = E_P\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbf{1}(k \leq N)\right)\Bigg|_{(x_k)=(X_k(\omega))}$$

$$= \left\{\sum_{k=1}^{\infty} x_k P(k \leq N)\right\}\Bigg|_{(x_k)=(X_k(\omega))} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} x_k (1-p)^{k-1}\right\}\Bigg|_{(x_k)=(X_k(\omega))}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega)(1-p)^{k-1}$$

jossa sarja suppenee P-melkein varmasti

$$E_P\left(\sum_{k=1}^{\infty} |X_k(\omega)|(1-p)^{k-1}\right) = (Fubini)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_P(|X_k(\omega)|)(1-p)^{k-1} = E_P(|X_1|)E_P(N) = E_P(|X_1|)\, p^{-1} < \infty$$

ja myös $L^2(P)$ mielessä koska

$$E\left(\sum_{k=1}^{\infty} \{X_k(\omega)\}^2 (1-p)^{2(k-1)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} E_P(X_k(\omega)^2)(1-p)^{2(k-1)} =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{2(k-1)} = (1-(1-p)^2)^{-1} < \infty$$

(c) Laske ehdolliset odotusarvot

$$E_P(Y^2|\sigma(N))(\omega) \quad \text{ja} \quad E_P(Y^2|\sigma(X_k : k \in \mathbb{N}))(\omega),$$

ja osoita että nämä satunnaismuuttujat kuuluvat $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ avaruuteen.

R.

$$E_P\big(Y^2\big|\sigma(N)\big)(\omega) = E_P\big(\Phi((X_k), N)^2\big|\sigma(N)\big)(\omega) = E_P\big(\Phi((X_k), n)^2\big)\Big|_{n=N(\omega)}$$
$$= E_P\left(\left\{\sum_{k=1}^{n} X_k\right\}^2\right)\Bigg|_{n=N(\omega)} = \left\{\sum_{k=1}^{n} E_P(X_k^2) + 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\le h<k} E_P(X_h)E_P(X_k)\right\}\Bigg|_{n=N(\omega)}$$
$$\sum_{k=1}^{N(\omega)} E_P(X_k^2) = N(\omega)$$

$$E_P\big(Y^2\big|\sigma(X_k : k \in \mathbb{N})\big)(\omega) = E_P\big(\Phi((X_k), N)^2\big|\sigma(X_k : k \in \mathbb{N})\big)(\omega)$$
$$= E_P\big(\Phi((x_k), N)^2\big)\Big|_{(x_k)=(X_k(\omega))} = E_P\left(\left\{\sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbf{1}(k \le N)\right\}^2\right)\Bigg|_{(x_k)=(X_k(\omega))}$$
$$= \left\{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 P(k \le N) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{1\le h<k} x_k x_h P\big(\{k \le N\} \cap \{h \le N\}\big)\right\}\Bigg|_{(x_k)=(X_k(\omega))}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega)^2 P(k \le N) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{1\le h<k} X_k(\omega)X_h(\omega)P(k \le N)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega)^2 (1-p)^{k-1} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{1\le h<k} X_k(\omega)X_h(\omega)(1-p)^{k-1}$$

Seuraa ehdollisen odotusarvon ominaisuuksista että

$$E_P\Big(E_P\big(Y^2\big|\sigma(X_k : k \in \mathbb{N})\big)\Big) = E_P\Big(E_P\big(Y^2\big|\sigma(N)\big)\Big) = E(Y^2) = E(N) = p^{-1} < \infty$$

(d) Laske odotusarvot $E_P(Y)$, $E_P(Y^2)$.

R.

$$E_P(Y) = E_P\Big(E_P\big(Y\big|\sigma(X_k : k \in \mathbb{N})\big)\Big) = E_P\Big(E_P\big(Y\big|\sigma(N)\big)\Big) = 0$$

$$E_P(Y^2) = E_P\Big(E_P\big(Y^2\big|\sigma(X_k : k \in \mathbb{N})\big)\Big) = E(N) = p^{-1}$$
$$= E_P\Big(E_P\big(Y^2\big|\sigma(N)\big)\Big) = E_P\Big(\sum_{k=1}^{\infty} X_k^2(1-p)^{k-1} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{1\le h<k} X_k X_h (1-p)^{k-1}\Big) =$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} E_P(X_k^2)(1-p)^{k-1} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{1\le h<k} E_P(X_k)E_P(X_h)(1-p)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}$$
$$= E_P(N) = p^{-1}$$

4. Osoita Fatou lemma ehdollisille odotusarvolle: jos $0 \le X_n(\omega)$,

$$0 \le E_P(\liminf X_n|\mathcal{G})(\omega) = \liminf_n E_P(X_n|\mathcal{G})(\omega)$$

R.

Monotoninen konvergenssi ehdollisille odotusarvoille (EMK):

Väite: Jos $0 \le X_n \uparrow X \in L^1$, niin $E(X_n|\mathcal{G})(\omega) \uparrow E(X|\mathcal{G})(\omega)$ mv.

(Huom: monisteessa ei ole $X \in L^1$ ehtoa.)

Tod: Koska $0 \le X_n \uparrow X$, niin lemmasta 11.0.1 seuraa, että myös jono

$$0 \le E(X_n|\mathcal{G}) \uparrow \quad \text{mv.}$$

on kasvava ja suppenee mv kohti $\lim_n E(X_n|\mathcal{G}) (= \limsup_n E(X_n|\mathcal{G}))$, joka on $\mathcal{G}$-mitallinen (seuraus 3.0.3). Pitää osoittaa, että $\lim_n E(X_n|\mathcal{G})$ on ehdollisen odotusarvon $E(\lim_n X_n|\mathcal{G})$ versio:

Jos testijoukko $A \in \mathcal{G}$, niin

$$E(\mathbf{1}_A \lim_n E(X_n|\mathcal{G}) \overset{MK}{=} \lim_n E(\mathbf{1}_A E(X_n|\mathcal{G}) \overset{EOA}{=} \lim_n E(\mathbf{1}_A X_n)$$
$$\overset{MK}{=} E(\mathbf{1}_A \lim_n X_n) \overset{EOA}{=} E(\mathbf{1}_A E(X|\mathcal{G})) \quad \square$$

Ehdollinen Fatou todistetaan samalla tavalla kuin tavallinen Fatou: $0 \le Z_n := \inf_{k\ge n} X_k$. $Z_n \uparrow$ mv ja $Z_n \le X_n$.

$$\liminf_n E(X_n|\mathcal{G}) \ge \liminf_n E(Z_n|\mathcal{G})$$
$$= \lim_n E(Z_n|\mathcal{G}) \overset{EMK}{=} E(\lim_n Z_n|\mathcal{G})$$
$$= E(\liminf_n X_n|\mathcal{G})$$

5. Olkoon $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \dots, \xi_d(\omega)) \in \mathbb{R}^d$ Gaussinen satunnaisvektori jonka komponentit $\xi_k(\omega) \in \mathbb{R}$ P-riippumattomia ja samoin jakautuneita standardi-Gaussisia satunnaismuuttujat, joilla $E_P(\xi_k) = 0$ ja $E_P(\xi_k^2) = 1$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d) \in \mathbb{R}^d$, vakio vektori, ja $A = (A_{ij} : 0 \le i \le j \le d)$ vakio $d \times d$ matriisi.

   Olkoon $X(\omega) = (\mu + A\xi(\omega)^\top) \in \mathbb{R}^d$.

   Osoita: $E_P(X) = \mu$ ja $E_P(X_i X_j) - E_P(X_i)E_P(X_j) = \Sigma_{ij}$, jossa $\Sigma = AA^\top$.

   Osoita että satunnaisvektorilla X on tiheysfunktio $\mathbb{R}^d$-Lebesgue mitan suhteen

$$p_X(x) = (2\pi)^{-d/2} \det(\Sigma)^{-1/2} \exp\bigl(-\frac{1}{2}(x-\mu)\Sigma^{-1}(x-\mu)^\top\bigr)$$

   eli jos $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ on mitallinen rajoitettu testifunktio

$$E_P\Bigl(g(X)\Bigr) = E_P\bigl(g(\mu + A\xi^\top)\bigr) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} g\bigl(\mu_1 + \sum_{j=1}^d A_{1j}y_j, \dots, \mu_d + \sum_{j=1}^d A_{1j}y_j\bigr) \prod_{j=1}^d \Bigl\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-y_j^2/2) \Bigr\} dy_1 \dots dy_d =$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x_1, \dots, x_d) p_X(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d$$

   Vihje Muuttujan vaihdolla $x = \mu + Ay^\top$.

   R.

   - Tiheys.
     Pystyvektorein

$$\begin{aligned}
&\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \dots, \xi_d(\omega))^\top \in \mathbb{R}^d \\
&\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)^\top \in \mathbb{R}^d \\
&x = (x_1, \dots, x_d)^\top \in \mathbb{R}^d \\
&x = \mu + A\xi,
\end{aligned}$$

     jne. Tiheyden neliömuotoon tulee $(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)$.

Muunnos on $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, oletetaan, että A on kääntyvä.

$$\begin{aligned} E_P(g(X)) &= E_{P_{\xi_1}\otimes\cdots\otimes P_{\xi_d}}(g(X)) \\ &\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} g(\mu + A\xi) dP_{\xi_1} \dots dP_{\xi_d} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(\mu + Ay) p_\xi(y) dy, \end{aligned} \tag{0.3}$$

missä

$$\begin{aligned} p_\xi(y) &= \prod_{j=1}^{d} p_{\xi_j}(y_j) \\ &= (2\pi)^{-d/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} y^\top y \right\} \end{aligned}$$

Sijoituksella $x = \mu + Ay$ yhtälöön (0.3) ($y = A^{-1}(x - \mu)$, Jakobiaani $= \det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$) on

$$\begin{aligned} E_P(g(X)) &= \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \det(A^{-1}) p_\xi(A^{-1}(x - \mu)) dx \\ &:= \int_{\mathbb{R}^d} g(x) p_X(x) dx, \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \det(A^{-1}) \exp\left\{ -\frac{1}{2} (A^{-1}(x - \mu))^\top (A^{-1}(x - \mu)) \right\} \\ &= \det(A^{-1}) \exp\left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu)^\top (A^\top)^{-1} A^{-1} (x - \mu) \right\} \\ &= \det(A^{-1}) \exp\left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu)^\top (AA^\top)^{-1} (x - \mu) \right\}. \end{aligned}$$

Asettamalla $\Sigma = AA^\top$ (symmetrinen positiivi definiitti oletuksin) on $\det(A) = \sqrt{\det(\Sigma)}$, saadaan multinormaalijakauma.

- $$E_P(X) = E_P(\mu + A\xi) = \mu + AE_P(\xi) = \mu.$$

- $$\begin{aligned} E(XX^\top) &= E((\mu + A\xi)(\mu + A\xi)^\top) \\ &= E(\mu\mu^\top + \mu\xi^\top A^\top + A\xi\mu^\top + A\xi\xi^\top A^\top) \\ &= \mu\mu^\top + AE(\xi\xi^\top)A^\top \\ &= \mu\mu^\top + AA^\top = \mu\mu^\top + \Sigma. \end{aligned}$$

6. Olkoon $(X, Y) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ yhteisesti Gaussisia satunnaisvektoreita, jolla $X(\omega) \in \mathbb{R}^{n_x}$ ja $Y(\omega) \in R^{n_y}$ kovarianssimatriisilla

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{xy}^\top & \Sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

Oletamme $E_P(X) = E_P(Y) = 0$ muuten voimme aina siirtyä käsittelemään satunnaisvektoreita $X' = (X - E(X))$ ja $Y' = (Y - E(Y))$.

Laske Bayesin' kaavalla tiheysfunktiot ehdollisilla jakaumille

$$p_{X|\ Y}(x|Y = y) \quad \text{ja} \quad p_{Y|X}(y|\ X = x)$$

R

(Lainaamalla hieman Douglas Hamilton: Time Series Analysis)

Kaikki vektorit seuraavassa pystyvektoreita

$$\begin{aligned} X &= (X_1, \ldots, X_{n_x})^\top \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{xx}) \\ Y &= (Y_1, \ldots, Y_{n_y})^\top \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{yy}) \end{aligned}$$

ja

$$(X^\top, Y^\top)^\top \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$$

Jokainen symmetrinen positiivi definiitti[1] (lohko) matriisi Σ[2] voidaan esittää tulona

$$\Sigma = ADA^\top,$$

missä A on alakolmio (lohko) matriisi ja D on diagonaali (lohko) matriisi. Tällöin

$$\begin{aligned} \Sigma^{-1} &= (ADA^\top)^{-1} = (A^\top)^{-1} D^{-1} A^{-1} \\ &= (A^{-1})^\top D^{-1} A^{-1}, \end{aligned}$$

ja determinantti

$$|\Sigma| = |A||D||A^\top| = |A||D||A|.$$

[1] $x^\top M x > 0$ kaikille $x \neq 0$.

[2] Kovarianssimatriisi on symmetrinen neliömatriisi ja vähintään si-negatiivisesti definiitti. Jos sitä halutaan kääntää, sen on oltava pos def.

Diagonaalimatriisin $diag(D_{11}, D_{22})$ käänteismatriisi on $diag(D_{11}^{-1}, D_{22}^{-1})$, determinantti $|D| = |D_{11}||D_{22}|$, ja alakolmimatriisin determinantti on diagonaalilohkojen determinanttien tulo[3].

Jos kerrotaan Σ vasemmalta matriisilla[4]

$$E = \begin{pmatrix} I_{n_x} & 0 \\ -\Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1} & I_{n_y} \end{pmatrix}$$

ja oikealta E:n transpoosilla, niin

$$E\Sigma E^\top = \begin{pmatrix} \Sigma_{xx} & 0 \\ 0 & \Sigma_{yy} - \Sigma_{xx}^{-1}\Sigma_{xy} \end{pmatrix} := D$$

ja

$$\begin{aligned} \Sigma &= E^{-1}D(E^{-1})^\top, \text{ josta} \\ \Sigma^{-1} &= (E^{-1}D(E^{-1})^\top)^{-1} \\ &= E^\top D^{-1}E. \end{aligned}$$

Yhteisjakauma on $(n = n_x + n_y)$

$$\begin{aligned} P_{(X,Y)}(x,y) &= (2\pi)^{-n/2}|\Sigma|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x^\top, y^\top)\Sigma^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\} \\ &= (2\pi)^{-n/2}(|E^\top||D||E|)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x^\top, y^\top)E^\top D^{-1}E\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\} \\ &= (2\pi)^{-n/2}|D|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(E\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^\top D^{-1}E\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\} \\ &= (2\pi)^{-n/2}(|D_{11}||D_{22}|)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}z^\top D^{-1}z\right\}, \qquad (0.4) \end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned} z = E\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I_{n_x} & 0 \\ -\Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1} & I_{n_y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y - \Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}x \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ y - m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

[3] Dimensioiden on täsmättävä.

[4] E nollaa Σ:n vasemman alakulman. Vastaavasti kertomalla oikealta $E^\top$ nollaa oikean yläkulman.

Sijoittamalla z yhtälöön (0.4) takaisin, on eksponentille

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}z^\top D^{-1}z &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y-m \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} D_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & D_{22}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-m \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2}\left(x^\top D_{11}^{-1}x + (y-m)^\top D_{22}^{-1}(y-m)\right).
\end{aligned}$$

X:n tiheys on

$$p_X(x) = (2\pi)^{-n_x/2}|\Sigma_{xx}|^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}x^\top\Sigma_{xx}^{-1}x\right\} \quad (>0)$$

ja ($D_{11} = \Sigma_{xx}$)

$$\begin{aligned}
p_{Y|X}(y|x) &= \frac{p_{(X,Y)}(x,y)}{p_X(x)} \\
&= \frac{(2\pi)^{-n/2}(|\Sigma_{xx}||D_{22}|)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x^\top\Sigma_{xx}^{-1}x + (y-m)^\top D_{22}^{-1}(y-m)\right)\right\}}{(2\pi)^{-n_x/2}|\Sigma_{xx}|^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}x^\top\Sigma_{xx}^{-1}x\right\}} \\
&= (2\pi)^{-n_y/2}|D_{22}|^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}(y-m)^\top D_{22}^{-1}(y-m)\right\},
\end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned}
D_{22} &= \Sigma_{yy} - \Sigma_{xx}^{-1}\Sigma_{xy}, \\
m &= \Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}x
\end{aligned}$$