HY Todennäköisyysteoria II, syksy 2013, laskuharjoitukset 11 (27.11.2013)

1. Olkoon $X(\omega)$ Poisson(λ) jakautunut satunnaismuuttuja, $\lambda > 0$, ja $Y(\omega) := \mathbf{1}(X(\omega) > 0)$.

   a Laske satunnaismuuttujan X "elementaarinen" ehdollinen odotusarvo ehdolla tapahtumia $A = \{\omega : Y(\omega) = 1\}$ ja $A^c = \{\omega : Y(\omega) = 0\}$

$$E_P(X|Y = 1), \quad E_P(X|Y = 0)\ .$$

   R.
   Poisson jakautunut sm saa arvoja $k = 0, 1, \ldots$. Elementaariset ehdolliset odotusarvot:

$$\begin{aligned}\frac{E(X\mathbf{1}_A)}{P(A)} &= \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{P(X = k, A)}{P(A)} = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{P(X = k, X > 0)}{P(X > 0)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{P(X = k)}{1 - P(X = 0)} = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}}\sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) \\ &= \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}}\end{aligned}$$

$$\frac{E(X\mathbf{1}_A)}{P(A^c)} = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{P(X = k, A^c)}{P(A^c)} = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{P(X = k, X = 0)}{P(X = 0)} = 0$$

   b Laske satunnaismuuttujan X ehdollinen odotusarvo ehdolla σ-algebraa $\sigma(Y)$

$$E_P(X|\sigma(Y))(\omega)$$

   R.

   $\{A, A^c\}$ on Ω:n ositus ja odotusarvo ehdolla $\sigma(Y) = \sigma(A, A^c)$ on

$$\begin{aligned}E_P(X|\sigma(Y))(\omega) &= \frac{E(X\mathbf{1}_A)}{P(A)}\mathbf{1}_A(\omega) + \frac{E(X\mathbf{1}_{A^c})}{P(A^c)}\mathbf{1}_{A^c}(\omega) \\ &= \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}}\mathbf{1}_A(\omega) + 0\mathbf{1}_{A^c}(\omega) \\ &= \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}}\mathbf{1}_{(X>0)}(\omega)\end{aligned}$$

2. Olkoon $G_1(\omega)$ ja $G_2(\omega)$ riippumattomia standardi Gaussisia satunnaismuuttujat jolla

$$P(G_1 \leq x, G_2 \leq y) = P(G_1 \leq x)P(G_2 \leq y) = \Phi(x)\Phi(y),$$
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\big(-\frac{y^2}{2}\big) dy$$

Olkoon $M(\omega) = \max\big\{G_1(\omega), G_2(\omega)\big\}$.

a) Laske $E_P(M|\sigma(G_1))(\omega)$.

R.

$$M(\omega) = G_1(\omega)\mathbf{1}_{(\omega:G_1>G_2)} + G_2(\omega)\mathbf{1}_{(\omega:G_1\leq G_2)}.$$

Josta

$$\begin{aligned} E(M|\sigma(G_1)) &= E(G_1\mathbf{1}_{(G_1>G_2)}|\sigma(G_1)) + E(G_2\mathbf{1}_{(G_1\leq G_2)}|\sigma(G_1)) \\ &= G_1 E(\mathbf{1}_{(G_1>G_2)}|\sigma(G_1)) + E(G_2\mathbf{1}_{(G_1\leq G_2)}|\sigma(G_1)) \\ &\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} G_1 E(\mathbf{1}_{(x>G_2)})\big|_{x=G_1(\omega)} + E(G_2\mathbf{1}_{(x\leq G_2)})\big|_{x=G_1(\omega)} \\ &= G_1 P(G_2 < x)\big|_{x=G_1(\omega)} + \int_{\mathbb{R}} y\mathbf{1}(x \leq y))dF_{G_2}(y) \\ &= G_1\Phi(G_1(\omega)) + \int_x^\infty y\phi(y)dy \\ &= G_1\Phi(G_1(\omega)) - \int_x^\infty \phi\prime(y)dy \\ &= G_1(\omega)\Phi(G_1(\omega)) + \phi(G_1(\omega)). \end{aligned}$$

b) Laske $E_P(G_1|\sigma(M))(\omega)$.

Vihje Katso tehtävän 5) vihjeet.

R.

Vastaus on vuoden 2012 H10:sta hivenen laveammin kirjoitettu.

Tiedetään maksimi M eli tiedetään tapahtumien $M \in B_k$, $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ virittämä sigma-algebra $\sigma(M)$. Ei tiedetä kumpi G_1 vai G_2 on suurempi.

Vihjeen satunnaismuuttuja

$$I(\omega) := \mathbf{1}_{\{\omega:G_1(\omega)\geq G_2(\omega)\}}(\omega) := \mathbf{1}_{(G_1\geq G_2)}(\omega)$$

tietää ja $\sigma(M) \subseteq \sigma(M, I)$. Ajatuksena on laskea ehdollinen odotusarvo ikäänkuin tiedettäisi myös kumpi, G_1 tai G_2, on suurempi $(E(\cdot|\sigma(M, I)))$ ja sitten ehdollistaa tämä pienemmän sigma-algebran $\sigma(M)$ suhteen ja saadaan kysytty (Luentojen kohdan 11.3 ominaisuus 3).

Ensiksi on

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{(M=G_1)}(\omega) &= I(\omega) \quad \text{ja} \\ \mathbf{1}_{(M=G_2)}(\omega) &= (1 - I(\omega)), \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} M(\omega)I(\omega) &= G_1(\omega)I(\omega) \quad \text{ja} \\ M(\omega)(1 - I(\omega)) &= G_2(\omega)(1 - I(\omega)). \end{aligned}$$

jokaisella ω. Jättäen ω:t kirjoittamatta (indikaattori on paksunnettu) on

$$\begin{aligned} G_1 &= G_1 I + G_1(1 - I) \\ &= MI + G_1(1 - I), \end{aligned}$$

josta

$$\begin{aligned} E(G_1|\sigma(M, I)) &= E(MI|\sigma(M, I)) + E(G_1(1 - I)|\sigma(M, I)) \\ &= MI + E(G_1|\sigma(M, I))(1 - I) \\ &= M\mathbf{1}_{(M=G_1)} + E(G_1|\sigma(M, I))\mathbf{1}_{(M=G_2)}, \end{aligned} \tag{0.1}$$

missä toisella rivillä on käytetty ominaisuutta 11.3, 4.

Tehtävän 5 vihjeen yhtäläisyydestä

$$E(X|\sigma(M, I))\mathbf{1}_{(G_1<G_2)} = E(X|\sigma(G_2, I))\mathbf{1}_{(G_1<G_2)},$$

seuraa

$$\begin{aligned} E(G_1|\sigma(M, I))(1 - I) &= E(G_1|\sigma(M, I))\mathbf{1}_{(G_1<G_2)} \\ &= E(G_1|\sigma(G_2, I))\mathbf{1}_{(G_1<G_1)} \end{aligned}$$

ja saman vihjeen seuraavasta rivistä seuraa

$$\begin{aligned}
&= \frac{E(G_1\mathbf{1}_{(G_1<G_2)}|\sigma(G_2))}{E(\mathbf{1}_{(G_1<G_2)}|\sigma(G_2))}\mathbf{1}_{(G_1<G_2)} \\
&\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \left(\frac{E(G_1\mathbf{1}_{(G_1<y)})}{E(\mathbf{1}_{(G_1<y)})}\right)\Big|_{y=M(\omega)}\mathbf{1}_{(M=G_2)} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{M} x\phi(x)dx}{\Phi(M)}\mathbf{1}_{(M=G_2)} \\
&= -\frac{\int_{-\infty}^{M} \phi'(x)dx}{\Phi(M)}\mathbf{1}_{(M=G_2)} \\
&= -\frac{\phi(M)}{\Phi(M)}\mathbf{1}_{(M=G_2)}
\end{aligned}$$

Sijoittamalla yhtälöön (0.1)

$$E(G_1|\sigma(M,I)) = M\mathbf{1}_{(M=G_1)} - \frac{\phi(M)}{\Phi(M)}\mathbf{1}_{(M=G_2)}$$

Tästä pitää ehdollistaa I pois. Ehdollistamalla $\sigma(M)$:n suhteen on

$$\begin{aligned}
E(G_1|\sigma(M)) &= E\left[E(G_1|\sigma(M,I))\big|\sigma(M)\right] \\
&= E\left[M\mathbf{1}_{(M=G_1)} - \frac{\phi(M)}{\Phi(M)}\mathbf{1}_{(M=G_2)}\big|\sigma(M)\right] \\
&= ME\left[\mathbf{1}_{(M=G_1)}\big|\sigma(M)\right] - \frac{\phi(M)}{\Phi(M)}E\left[\mathbf{1}_{(M=G_2)}\big|\sigma(M)\right],
\end{aligned}$$

missä on jälleeen siirretty mitalliset termit ulos (11.3,4).
Todennäköisyydelle

$$\begin{aligned}
E\left[\mathbf{1}_{(M=G_2)}\big|\sigma(M)\right] &= P(G_1 < G_2|M) \\
&= \frac{P(M|G_1 < G_2)P(G_1 < G_2)}{P(M)} \\
&= \frac{P(M|G_1 < G_2)P(G_1 < G_2)}{P(M|G_1 < G_2)P(G_1 < G_2) + P(M|G_2 \leq G_1)P(G_2 \leq G_1)} \\
&= \frac{P(M|G_1 < G_2)}{2P(M|G_1 < G_2)} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

missä supistukset yhteisjakauman symmetrian vuoksi: $P(G_1 < G_2) = P(G_2 < G_1)$[1]. Ja

$$E(G_1|\sigma(M)) = \frac{1}{2}\left(M(\omega) - \frac{\phi(M(\omega))}{\Phi(M(\omega))}\right)$$

3. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $X(\omega)$ satunnaismuuttuja jolla

   a) $P(X \in dx) = \mathbf{1}(x \geq 0)\exp(-x)dx$, X on 1-eksponentiaalinen

   b) $P(X \in dx) = \pi^{-1}(1 + x^2)^{-1}dx$, X on Cauchy jakautunut.

   Osoita:

   tapauksessa **a)** $E_P(|X|) < \infty$,

   ja tapauksessa **b)** $E_P(|X|) = \infty$.

   R.

(a)

$$\begin{aligned}
E|X| &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\mathbf{1}(x \geq 0)e^{-x}dx \\
&= -\int_0^{+\infty} xe^{-x}(-1)dx \\
&= -\Big/_0^{+\infty} xe^{-x} + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1.
\end{aligned}$$

[1] Todennäköisyyden $P(G_1 < G_2)$ voi myös laskea. Asettamalla $Z = G_2 - G_1$ on

$$\begin{aligned}
P(G_1 < G_2) = P(Z < 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(Z < 0|G_1 = x)dF_{G_1}(x) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} P(x - G_2 < 0|G_1 = x)dF_{G_1}(x) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} P(x < G_2)dF_{G_1}(x) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - F_{G_2}(x))dF_{G_1}(x) = \dots.
\end{aligned}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
E(|X|) &= \int_\Omega |X| P(d\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| P(X^{-1}(dx)) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| P_X(dx) \\
&= \pi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|(1+x^2)^{-1} dx \\
&= 2\pi^{-1} \int_0^{+\infty} x(1+x^2)^{-1} dx \\
&= 2\pi^{-1} \Big(\Big/_0^{+\infty} x \arctan(x) - \Big/_0^{+\infty} \arctan(x) \Big) \\
&= 2\pi^{-1} (\infty \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) = \infty
\end{aligned}
$$

4. Olkoon $Y(\omega) = \lfloor X(\omega) \rfloor = \max\{ n \in \mathbb{Z} : n \leq X(\omega)\} \in \mathbb{Z}$.

   Laske tapauksissa **3.a**) ja **3.b**) ehdollinen odotusarvo

   $$E_P(X|\sigma(Y))(\omega) \in \mathbb{R}$$

   Vihje Huomaat että σ-algebra $\sigma(Y)$ on numeroituvasti generoitu, eli on olemassa numeroituva $\mathcal{F}$-mitallinen ositus joka virittää σ-algebraa.

   R.

   Luentomonisteen Tehtävä 11.0.2 on äärelliselle ositukselle. Lyhyt perustelu sille, että se pätee myös numeroituvalle:

   Jos $X \ngeq 0$ mv, voidaan tehdä sama X^+:lle ja X^-:lle. Jos $\{A_1, A_2, \ldots\}$ on numeroituva ositus ja A testijoukko (joku osituksen jäsenistä kelpaa, esim A_j) , niin monotonisesta konvergenssista

   $$
   \begin{aligned}
   &E\left(\mathbf{1}_{A_j} \lim_n \sum_{k=1}^n \frac{E(X\mathbf{1}_{A_k})}{P(A_k)} \mathbf{1}_{A_k} \right) \\
   &= \lim_n \sum_{k=1}^n E\left(\frac{E(X\mathbf{1}_{A_k})}{P(A_k)} \mathbf{1}_{A_k} \mathbf{1}_{A_j} \right) = E(\mathbf{1}_{A_j} X).
   \end{aligned}
   $$

   Sm Y saa arvoja $n \in \mathbb{Z}$, joten $\sigma(Y)$ on joukkojen

   $$A_n = \{\omega : n \leq X(\omega) < n+1\}, \quad n \in Z$$

   virittämä. Joukot A_n osittavat Ω:n ja X:n odotusarvo ehdolla $\sigma(Y)$ on

   $$\sum_n \frac{E(X\mathbf{1}_{A_n})}{P(A_n)} \mathbf{1}_{A_n}. \tag{0.2}$$

(a)

- $P(X \in A_n) = \int_n^{n+1} e^{-x} dx = e^{-n}(1 - e^{-1})$
-

$$\begin{aligned}
E(X\mathbf{1}_{A_n}) &= \int_n^{n+1} x e^{-x} dx \\
&= -\Big/_{n}^{n+1} x e^{-x} + \int_n^{n+1} e^{-x} dx \\
&= -\Big/_{n}^{n+1} x e^{-x} - \Big/_{n}^{n+1} e^{-x} \\
&= (n+1)e^{-n} - (n+2)e^{-(n+1)} \\
&= e^{-n}(n + 1 - (n+2)e^{-1})
\end{aligned}$$

Sijoittamalla nämä yhtälöön (0.2) saadaan

$$E(X|\sigma(Y)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n + 1 - (n+2)e^{-1})}{1 - e^{-1}} \mathbf{1}_{A_n}.$$

(b)

- $P(A_n) = \pi^{-1} \int_n^{n+1} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi^{-1}(\arctan(n+1) - \arctan(n))$, $n \in \mathbb{Z}$.
-

$$\begin{aligned}
E(X\mathbf{1}_{A_n}) &= \pi^{-1} \int_n^{n+1} x \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \pi^{-1} \left(\Big/_{n}^{n+1} x \arctan(x) - \int_n^{n+1} \frac{1}{1+x^2} dx \right) \\
&= \pi^{-1} \left(\Big/_{n}^{n+1} x \arctan(x) - \Big/_{n}^{n+1} \arctan(x) \right) \\
&= \pi^{-1} \left(n \arctan(n+1) - (n-1) \arctan(n) \right)
\end{aligned}$$

Sijoittamalla nämä yhtälöön (0.2) on

$$E(X|\sigma(Y)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{n \arctan(n+1) - (n-1)\arctan(n)}{\arctan(n+1) - \arctan(n)} \mathbf{1}_{A_n}(\omega)$$

Jokaisella ω on olemassa joukko $A_n \ni \omega$ (ositus), joten satunnaismuuttujalle $E(X|\sigma(Y))(\omega) < \infty$, eli X:n ehdollinen odotusarvo $< \infty$ jokaisella ω.

Mutta

$$E[E(X|\sigma(Y))^+(\omega)] = E\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\arctan(n+1) - (n-1)\arctan(n)}{\arctan(n+1) - \arctan(n)} \mathbf{1}_{A_n}(\omega)\right]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \pi(n\arctan(n+1) - (n-1)\arctan(n))$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{1+x^2} dx$$
$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} = \infty$$

Samoin $E[E(X|\sigma(Y))^-(\omega)] = \infty$ ja

$$E(|E(X|\sigma(Y))|) = \infty + \infty.$$

Yleisesti on kyllä

$$E|E(X|\mathcal{G})| \leq E|X|$$

(esim Kallenberg Foundations of Modern Probability, Theorem 5.1).

5. Olkoon $X(\omega)$ ja $Y(\omega)$ P riippumattomia ja tasaisesti jakautuneita välissä $[0,1]$, siis

$$P(X \in dx, Y \in dy) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\ \mathbf{1}_{[0,1]}(y)\ dx\ dy$$

Olkoon $Z(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega))$ ja $I(\omega) = \mathbf{1}(X(\omega) \leq Y(\omega))$

(a) Laske $P(X > Y)$.
R.

$$P(X > Y) = (P_X \otimes P_Y)(X > Y) = E_{P_X \otimes P_Y}(\mathbf{1}_{(X>Y)})$$
$$= \int \mathbf{1}_{(X>Y)} d(P_X \otimes P_Y)$$
$$\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \int \int \mathbf{1}_{(X>Y)} dP_X dP_Y$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(x>y)} \mathbf{1}_{[0,1]}(y) dy \right) \mathbf{1}_{[0,1]}(x) dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^x dy \right) \mathbf{1}_{[0,1]}(x) dx$$
$$= \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

(b) Laske "elementaarinen" ehdollinen odotusarvon tapahtuman ehdolla

$$E_P(X|X > Y)$$

R.

$$\begin{aligned}
E(X|X > Y) &= \frac{E(X\mathbf{1}_{(X>Y)})}{P(X > Y)} \overset{a)}{=} 2E(X\mathbf{1}_{(X>Y)}) \\
&= 2E_{P_X \otimes P_Y}(X\mathbf{1}_{(X>Y)}) \\
&\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} 2\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{(x>Y)} dP_Y \right) dP_X \\
&= 2\int_{\mathbb{R}} \left(x\int_0^x dy \right) dP_X \\
&= 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

(c) Laske ehdollinen odotusarvo

$$E_P(X|\sigma(I))(\omega)$$

R.

$$\sigma(I) = \sigma(\{\omega : I = 0\}, \{\omega : I = 1\}) = \sigma(\{X > Y\}, \{X \leq Y\}).$$

$$E(X|\sigma(I))(\omega) = \frac{E(X\mathbf{1}_{(X>Y)})}{P(X > Y)}\mathbf{1}_{(X>Y)}(\omega) + \frac{E(X\mathbf{1}_{(X\leq Y)})}{P(X \leq Y)}\mathbf{1}_{(X\leq Y)}(\omega)$$

Muut termit on jo,

$$\begin{aligned}
E(X\mathbf{1}_{(X\leq Y)}) &= E(X\mathbf{1}_{(X\leq Y)}) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{(x\leq y)}) dP_X \right) dP_Y \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^y x dx \right) dP_Y \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} y^2 dy = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Sijoittamalla

$$
\begin{aligned}
E(X|\sigma(I))(\omega) &= \frac{2}{3}\mathbf{1}_{(X>Y)} + \frac{1/6}{1-1/2}\mathbf{1}_{(X\le Y)} \\
&= \frac{2}{3}\mathbf{1}_{(X>Y)} + \frac{1}{3}\mathbf{1}_{(X\le Y)} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\mathbf{1}_{(X>Y)}
\end{aligned}
$$

(d) Laske ehdollinen odotusarvo $E_P(X|\sigma(Z), I)(\omega)$.
Vihje Koska

$$
Z(\omega)\mathbf{1}(X(\omega) > Y(\omega)) = Y(\omega)\mathbf{1}(X(\omega) > Y(\omega))
$$

voit osoitaa ensin (Kolmogorovin määritelmän kautta)

$$
\begin{aligned}
&E_P(X|\sigma(Z), \sigma(I))(\omega)\ \mathbf{1}(X(\omega) > Y(\omega)) \\
&= E_P(X|\sigma(Y), \sigma(I))(\omega)\mathbf{1}(X(\omega) > Y(\omega)) \\
&= \frac{E_P(X\mathbf{1}(X > Y)|\sigma(Y))}{P(X > Y|\sigma(Y))(\omega)}\mathbf{1}(X(\omega) > Y(\omega))
\end{aligned}
$$

Muistetaan että silloin kun X ja Y ovat P-riippumattomia,

$$
E_P(f(X, Y)|\sigma(Y))(\omega) = E_P(f(X, y))\Big|_{y=Y(\omega)}
$$

Vihje Laske ensin $E_P(X|\sigma(Z, I))$, jossa $I(\omega) := \mathbf{1}(X(\omega) \le Y(\omega))$ ja tietenkin$\sigma(Z, I) \supseteq \sigma(Z)$.

$$
E_P(Z|\sigma(Z)) = E_P\big(E_P(X|\sigma(Z, I))\big|\sigma(Z)\big)
$$

R.

Käyttämällä vihjettä

$$
E(X|\sigma(Z), \sigma(I)) = \frac{E(X\mathbf{1}_{(X>Y)}|\sigma(Y))}{P(X > Y|\sigma(Y))}\mathbf{1}_{(X>Y)} + \frac{E(X\mathbf{1}_{(X\le Y)}|\sigma(Y))}{P(X \le Y|\sigma(Y))}\mathbf{1}_{(X\le Y)}.
$$

$$
\begin{aligned}
E(X\mathbf{1}_{(X>Y)}|\sigma(Y)) &\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} E(X\mathbf{1}_{(X>y)})|_{y=Y(\omega)} \\
&= \left(\int_y^1 x dx\right)\Big|_{y=Y(\omega)} = \frac{1}{2}(1 - Y^2).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(X\mathbf{1}_{(X\le Y)}|\sigma(Y)) &\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} E(X\mathbf{1}_{(X\le y)})|_{y=Y(\omega)}\\
&= \left(\int_0^y x dx\right)\Big|_{y=Y(\omega)}\\
&= \frac{1}{2}Y^2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X\le Y|\sigma(Y)) &= E(\mathbf{1}_{(X\le Y)}|\sigma(Y))\\
&\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} E(\mathbf{1}_{(X\le y)})\Big|_{y=Y(\omega)}\\
&= \left(\int_0^y dx\right)\Big|_{y=Y(\omega)} = Y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X>Y|\sigma(Y)) &= E(\mathbf{1}_{(X>Y)}|\sigma(Y))\\
&\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \left(\int_y^1 dx\right)\Big|_{y=Y(\omega)} = 1-Y
\end{aligned}
$$

Sijoittamalla:

$$
\begin{aligned}
E(X|\sigma(Z),\sigma(I)) &= \frac{\frac{1}{2}(1-Y^2)}{1-Y}\mathbf{1}_{(X>Y)} + \frac{\frac{1}{2}Y^2}{Y}\mathbf{1}_{(X\le Y)}\\
&= Y + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{(X>Y)}
\end{aligned}
$$