HY Todennäköisyysteoria II, syksy 2013, laskuharjoitukset 10 (20.11.2013)

1. Matemaatiisessa rahoitusteoriassa on tapana mallittaa osakkeen arvo $S(\omega)$ hetkellä $t > 0$ log-normalisella jakaumalla, siis

$$S_t(\omega) = S_0 \exp\Big(\sigma\sqrt{t}G(\omega) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\Big)$$

jossa $S_0 > 0$ on osakkeen arvo hetkellä 0 ja $G(\omega) \sim \mathcal{N}(0,1)$, eli P:n suhteen $G(\omega)$ on standardi gaussinen jolla

$$P(G \le x) = \int_{-\infty}^{x} \gamma(y)dy, \qquad \gamma(y) = \frac{\exp(-y^2/2)}{\sqrt{2\pi}}$$

Eurooppalainen optio on satunaissmuuttuja $H(\omega) = h(S_t(\omega))$, jossa $x \mapsto h(x)$ on mitallinen.

Option hinta hetkellä 0 on odotusarvo $c(t, S_0, \theta) := E_P(h(S_t))$ tietyn riskineutraali todennäköisyysmitan P suhteen.

(a) Oleta ensin että $x \mapsto h(x)$ on derivoituva ja osoita että $c(t, S_0, \sigma)$ on derivoituva parametrien t, S_0 ja σ:n suhteen, joillakin tasaisen integroivuuden oletuksilla.

(b) Osoita että $c(t, S_0, \sigma)$ on derivoituva parametrien t, S_0 ja σ:n suhteen, myös silloin $h(x)$ ei olisi derivoituva, joillakin tasaisen integroivuuden oletuksilla.

Vihjeet

$$\begin{aligned} c(t, S_0, \sigma) &= \int_{\mathbb{R}} h\big(\exp\big(\log S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma\sqrt{t}y\big)\big)\gamma(y)dy \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} h\big(\exp(x)\big)\ \gamma\big(x - \log S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 t\big)dx \end{aligned}$$

muuttujan vaihdolla $x = \log S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma y\sqrt{t}$.
Muista myös $\frac{d}{dx}\gamma(x) = -x\gamma(x)$.

(c) Laske $c(t, S_0, \sigma)$, $\frac{\partial c(t,S_0,\sigma)}{\partial t}$, $\frac{\partial c(t,S_0,\sigma)}{\partial S_0}$, $\frac{\partial c(t,S_0,\sigma)}{\partial \sigma}$,
silloin kun $h(x) = (x-K)^+$ ja $h(x) = (x-K)^-$, $K > 0$.

$\big(S_t(\omega) - K\big)^+$ kutsutaan eurooppalaiseksi osto-optioksi joka antaa oikeus mutta ei velvollisuutta ostaa yhden osakkeen maturiteetti hetkellä

t ennalta sovitulla hinnalla K. Jos markkinahinta $S(\omega)$ on maturiteetin hetkellä korkeampi kun K, option haltija lunastaa optionsa, ostaa osakkeen hinnalla K ja kun myy heti sen pois saa voittoa $\big(S_t(\omega)-K\big)^+$. Jos $S \leq K$, osto-optio on silloin arvoton,

Vastaavasti $\big(S_t(\omega)-K\big)^-$ kutsutaan eurooppalainen myyntioptioksi.Tämän option haltijalla on oikeus (mutta ei velvollisuus) myydä maturiteettin hetkellä t yhden osakkeen ennalta sovitulla hinnalla K.

R.

Mitä keinoja todentaa perheen (X_t) TI on? Ainakin

- Dominoida integroituvalla sm:lla:

  $$sup_t X(\omega) < Y(\omega) \in L^1$$

  melkein kaikilla ω.

- $$\sup_t E|X|^p < \infty,\ p > 1.$$

(a) Oletetaan, että $\partial_x h(x)$ on olemassa. Valitaan väli $(0, M) \ni t$ lauseen 8.0.3 väliksi, jonka sisällä voidaan mhdollisesti derivoida.

$$\partial_t c(t, S_0, \sigma) \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}} \partial_t h(S_t)\gamma(y)dy$$

Tehdään samalla tavalla kuin mgf tehtävissä, mennään derivoimaan integraalin sisälle ja varmistutaan perheen $(\partial_t h(S_t))_{t\in(0,M)}$ tasaisenen integroituvuus.
Derivaatta on

$$\partial_t h(S_t) = \partial_x h(S_t) \cdot S_t \cdot \partial_t(\sigma\sqrt{t}G(\omega) - \frac{1}{2}\sigma^2 t).$$

$G(\omega)$ termiä on hankala rajoittaa, kokeilen toista keinoa, rajoitan odotusarvoa $E|\partial_t h(S_t)|^2$. Soveltamalla Hölderiä muodossa

$$||XY||_r \leq ||X||_p ||Y||_q,\ p^{-1} + q^{-1} = r^{-1},$$

on

$$||XYZ||_2 \leq ||XY||_4 ||Z||_4 \leq ||X||_8 ||Y||_8 ||Z||_4,$$

josta

$$[E|\partial_t h(S_t)|^2]^{1/2} \leq [E(\partial_x h(S_t))^8]^{1/8}[E(S_t)^8]^{1/8}[E(\partial_t(\sigma\sqrt{t}G(\omega)-\frac{1}{2}\sigma^2 t))^4]^{1/4}.$$

Viimeisessä termissä oleva derivaata on

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}t^{-1/2}G,$$

joka korotettuna potenssiin 4 on $\leq G$:n neljäs momentti, joka on laskettu edellisissä harjoituksissa. Välillä $[0, M]$ myös $t^2 \leq M^2$, viimeinen termi ei tuota ongelmia. Toinen odotusarvo saadaan G:n mgf:sta:

$$\begin{aligned} E(S_t)^8 &= S_0^8 e^{8(\sigma\sqrt{t}G(\omega)-\frac{1}{2}\sigma^2 t)} \\ &= S_0^8 e^{-4\sigma^2 t} E(e^{8\sigma\sqrt{t}G}) \\ &= S_0^8 e^{-4\sigma^2 t} e^{\frac{1}{2}(8\sigma\sqrt{t})^2}, \end{aligned}$$

joka $< S_0^8 e^{28\sigma^2 M}$ välillä $[0, M]$.

Ensimmäinen odotusarvo saadaan rajoitetuksi rajoittamalla $\partial_x h(x) \in L^8(\gamma)$. Rajoitettu kelpaa, tai rajoitettu kasvu (polynomi varmasti, koska normaalijakaumalla kaikki momentit).

Lauseen 8.0.3 muut ehdot ovat kunnossa, kaikki on jatkuvaa, ja välin $(0, M) \ni t$ sisällä voidaan derivoinnin ja integroinnin järjestys vaihtaa.

(b) Oletetaan, ettei $h(x)$:n tarvitse olla derivoituva. Vihjeen sijoituksella

$$c(t, S_0, \sigma) = \int_{\mathbb{R}} h(x)\frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\gamma\left(\frac{x - logS_0 + \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right) dx$$

$$\begin{aligned} \partial_t c(t, S_0, \sigma) &\stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}} \partial_t \left\{ h(e^x)\frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\gamma\left(\frac{x - logS_0 + \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right\} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(e^x)\partial_t \left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\gamma\left(\frac{x - logS_0 + \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right\} dx \quad (0.1) \end{aligned}$$

Jos otus integraalin sisällä osoittautuu TI jollain välillä, niin derivatan ja integraalin vaihto on oikeutettu. Derivaatta integraalin sisällä on

$$\partial_t\left(\sigma^{-1}t^{-1/2}\gamma(z)\right) = -\frac{1}{2}\sigma^{-1}t^{-3/2}\gamma(z) - \sigma^{-1}t^{-1/2}z\gamma(z)\partial_t z.$$

missä z on γ:n parametri edellisessä. Tämän ensimmäistä termiä vastaava integraali on

$$\int_{\mathbb{R}} h(e^x)(-\frac{1}{2}\sigma^{-1}t^{-3/2}\gamma(\frac{x - logS_0 + \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}))dx$$
$$= -\frac{1}{2t^2}\int_{\mathbb{R}} h(e^x)\frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\gamma(\frac{x - logS_0 + \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}})dx.$$

Sijoittamalla tähän takaisin x yhtälöstä

$$z = \frac{x - logS_0 + \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}, \tag{0.2}$$

saadaan

$$-\frac{1}{2t^2}E(h(S_t)). \tag{0.3}$$

Toista termiä vastaavalle integraalille on ensiksi

$$\partial_t z = -\frac{1}{2t^2}z + \frac{\sigma}{2\sqrt{t}},$$

ja integraali on

$$- \sigma^{-1}t^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} h(e^x)z\gamma(z)\partial_t z dx$$
$$= -\sigma^{-1}t^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} h(e^x)z\gamma(z)\left(-\frac{1}{2t^2}z + \frac{\sigma}{2\sqrt{t}}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2t^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{t}}h(e^x)z^2\gamma(z)dx - \frac{\sigma}{2\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{t}}h(e^x)z\gamma(z)dx$$
$$= \frac{1}{2t^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{t}}h(e^x)(\frac{x - logS_0 + \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}})^2\gamma(\frac{x - logS_0 + \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}})dx -$$
$$\frac{\sigma}{2\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{t}}h(e^x)(\frac{x - logS_0 + \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}})\gamma(\frac{x - logS_0 + \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}})dx.$$

Sijoittamalla näihin takaisin x yhtälöstä (0.2), saadaan

$$\frac{1}{2t^2}E(h(S_t)G^2) - \frac{\sigma}{2\sqrt{t}}E(h(S_t)G).$$

Integraali (0.1) saadaan tästä ja (0.3):stä

$$\frac{1}{2t^2}E(h(S_t)G^2) - \frac{\sigma}{2\sqrt{t}}E(h(S_t)G) - \frac{1}{2t^2}E(h(S_t)).$$

Kirjoittamalla tämä integraalina, on (0.1):

$$\int_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{2t^2} h(S_t) y^2 - \frac{\sigma}{2\sqrt{t}} h(S_t) y - \frac{1}{2t^2} h(S_t) \right\} \gamma(y) dy$$
$$:= \int_{\mathbb{R}} \{X_t - Y_t - Z_t\} \gamma(y) dy.$$

Pitää arvioida

$$\begin{aligned} \sup_t E|X_t - Y_t - Z_t|^2 &= \sup_t ||X_t - Y_t - Z_t||^2 \\ &\overset{Minkowski}{\leq} \sup_t (||X_t|| + ||Y_t|| + ||Z_t||)^2 \end{aligned}$$

Rajoittumalla samalla tavalla kuin edellisessä kohdassa välille $(0, M)$, päädytään arvioimaan termiä $\sup_t ||h(S_t)||$ tällä välillä ja saadaan samat ehdot, nyt $h(S_t)$:n kasvulle. Seuraavassa kohdassa $h(\cdot)$ ei ole derivoituva kaikkialla.

(c) Hinta eurooppalaiselle osto-optiolle $(S_t - K)^+$. Myyntioption hinnan voi joko laskea vastaavalla tavalla tai käyttää yhtälöä

$$(S_t - K)^+ + (S_t - K)^- = S_t - K.$$

Hivenen epämuodollisilla merkinnöillä integrointirajoissa, on

$$\begin{aligned} c(t, S_0, \sigma) &= E_P((S_t - K)^+) = E_P(\mathbf{1}_{\{S_t > K\}}(S_t - K)) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{S_t(y) > K\}}(S_t - K))\gamma(y) dy \\ &= \int_{\{S_t(y) > K\}} (S_t - K))\gamma(y) dy \end{aligned}$$

Integrointi raja:

$$\begin{aligned} S_t(y) &> K && \Leftrightarrow \\ -\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma\sqrt{t} y &> \log \frac{K}{S_0} && \Leftrightarrow \\ y &> \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left(\log \frac{K}{S_0} + \frac{1}{2}\sigma^2 t \right) := d \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} c(t, S_0, \sigma) &= \int_d^\infty (S_t - K))\gamma(y) dy \\ &= \int_d^\infty S_t \gamma(y) dy - K \int_d^\infty \gamma(y) dy \\ &= \int_d^\infty S_t \gamma(y) dy - K(1 - \Phi(d)), \end{aligned}$$

missä $\Phi(\cdot)$ on normaalijakauman kertymäfunktio.
Ensimmäinen integraali on:

$$I := S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t} \int_d^\infty e^{\sigma\sqrt{t}y}\gamma(y)dy$$

Sijoittamalla $\gamma(y)$, saadaan integrandiksi

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2}y^2+\sigma\sqrt{t}y} &= e^{-\frac{1}{2}(y^2-2\sigma\sqrt{t}y)} \\ &= e^{-\frac{1}{2}(y-\sigma\sqrt{t})^2-\sigma^2 t} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} I &= CS_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t} \int_d^\infty e^{-\frac{1}{2}(y-\sigma\sqrt{t})^2-\sigma^2 t} dy \\ &= CS_0 e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} \int_d^\infty e^{-\frac{1}{2}(y-\sigma\sqrt{t})^2} dy \\ &= S_0 e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t}(1-\Phi(d-\sigma\sqrt{t})), \end{aligned}$$

missä C on normaalijakauman vakiotermi ja viimeinen vaihe nähdään sijoituksella $z = y - \sigma\sqrt{t}$. Siis

$$c(t, S_0, \sigma) = S_0 e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t}(1-\Phi(d-\sigma\sqrt{t})) - K(1-\Phi(d)).$$

Soveltamalla Leibnitzin sääntöä on $\Phi(\cdot)$:n derivatta

$$\partial_t(\int_{-\infty}^{d(t)} \gamma(y)dy) = \gamma(d(t))\partial_t d(t),$$

missä $d(t)$ on kuten yllä.

$$\begin{aligned} \partial_t d(t) &= \partial_t \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\left(\log\frac{K}{S_0} + \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) \\ &= -\frac{1}{2t^2}d(t) + \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{t}}, \end{aligned}$$

ja

$$\partial_t(d(t)-\sigma\sqrt{t}) = \partial_t d(t) - \partial_t(\sigma\sqrt{t}) = -\frac{1}{2t^2}d(t),$$

mitkä voi sijoittaa seuraavaan

$$\partial_t c(t, S_0, \sigma) = S_0 e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t}\frac{1}{2}\sigma^2(1-\Phi(d-\sigma\sqrt{t})) - S_0 e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t}\partial_t\Phi(d-\sigma\sqrt{t}) + K\partial_t\Phi(d).$$

2. Osoita että $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ varustettuna olennaisen supremum normilla on täydellinen.

$$\| X \|_\infty = P\text{-esssup}_\omega \big\{ |X(\omega)| \big\} = \inf \big\{ \ K \in \mathbb{R} : P(|X| > K) = 0 \big\}$$

R.

$$||X||_\infty := \inf\{K \geq 0 : P(|X| > K) = 0\}$$

Infimumin määritelmästä seuraa, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on olemassa M_n s.e.

$$||X||_\infty \leq M_n < ||X||_\infty + \frac{1}{n}$$

ja $P(|X| > M_n) = 0$. Joukolle

$$\{\omega : |X(\omega)| > ||X||_\infty\} \subseteq \bigcup_n \{\omega : |X(\omega)| > M_n\}$$

$\Rightarrow$

$$P(|X(\omega)| > ||X||_\infty) \leq \sum_n P(|X(\omega)| > M_n) = 0. \qquad (0.4)$$

$|| \cdot ||_\infty$ on normi:

- Jos $||X||_\infty = 0$, niin edellisestä, $P(|X(\omega)| \leq 0) = 1$. Eli $X = 0$ mv (ekvivalenssiluokkia).
- $$|X + Y| \leq |X| + |Y| \leq ||X||_\infty + ||Y||_\infty$$

  $\Rightarrow$

  $$P(|X + Y| > ||X||_\infty + ||Y||_\infty) = 0,$$

  $\Rightarrow ||X + Y||_\infty \leq ||X||_\infty + ||Y||_\infty$
- $$|\lambda X| \leq |\lambda||X| \leq |\lambda| \ ||X||_\infty.$$

  $\Rightarrow$

  $$||\lambda X||_\infty \leq |\lambda|||X||_\infty \qquad (0.5)$$

(0.5) $\Rightarrow$

$$||X||_\infty = ||\frac{1}{\lambda}(\lambda X)||_\infty \le \frac{1}{|\lambda|}||\lambda X||_\infty \tag{0.6}$$

(0.5) ja (0.6) $\Rightarrow ||\lambda X||_\infty = |\lambda|||X||_\infty$

Olkoon sitten $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy: Jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ s.e.

$$||X_m - X_n||_\infty < \epsilon,$$

kun $n, m \ge N$. Yhtälön (0.4) mukaan joukon (jossa arviot ei pidä)

$$F_{m,n} := \{\omega : |X_m - X_n| \ge ||X_m - X_n||_\infty\}$$

mitta $P(F_{m,n}) = 0$ ja samoin joukolle $F := \bigcup_{m,n} F_{m,n}$

$$P(F) \le \sum_{m,n} P(F_{m,n}) = 0.$$

Joukolle

$$F^c = \bigcap_{m,n}\{\omega : |X_m - X_n| < ||X_m - X_n||_\infty\}$$

on $P(F^c) = 1$.

Valitaan $m, n \ge N$. Jokaiselle $\omega \in F^c$ on

$$|X_m(\omega) - X_n(\omega)| < ||X_m - X_n||_\infty < \epsilon$$

ja $X_m(\omega)$ on reaalilukujen Cauchy-jono $\Rightarrow$ jokaisella ω on olemassa $\lim_n X_n(\omega)(= \limsup X_n(\omega) = \liminf X_n(\omega))$. Asetetaan jokaisella $\omega \in \Omega$

$$X(\omega) = \limsup_n X_n(\omega).$$

Koska jokainen $X_m \in L^\infty$ on joukolle (kuten edellä joukoille $F_{m,n}$)

$$D_m := \{\omega : |X_m| > ||X_m||_\infty\}$$

$P(D_m) = 0$ ja $P(D := \cup_m D_m) = 0$, ja

$$P(D \bigcup F) \le P(D) + P(F) = 0,$$

josta $P(D^c \cap F^c) = 1$. Kun $\omega \in D^c \cap F^c$ on

$$\begin{aligned} |X(\omega)| &= |X(\omega) - X_m(\omega) + X_m(\omega)| \\ &\le |X(\omega) - X_m(\omega)| + |X_m(\omega)| \\ &\le \epsilon + ||X_m||_\infty, \end{aligned}$$

kun m on suuri (joukossa, jonka mitta on 1) mielivaltaiselle (mutta kiinteälle) ϵ. Raja-arvo $X \in L^\infty$.

3. Osoita:

(a) Kun $X, Y \in L^2(P)$,

$$\| X+Y \|_2^2 + \| X-Y \|_2^2 = 2 \| X \|_2^2 + 2 \| Y \|_2^2 \qquad \text{(Suunnikkaan identiteetti)}$$

R.
Sisätuloavaruudessa:

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 + ||x-y||^2 &= (x+y, x+y) + (x-y, x-y) \\ &= (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) + \\ &\quad (x,x) + (x,-y) + (-y,x) + (-y,-y) \\ &= 2(x,x) + 2(y,y) = 2||x||^2 + 2||y||^2. \end{aligned}$$

(b)

$$E_P(XY) = \frac{1}{4}\big(\| X+Y \|_2^2 - \| X-Y \|_2^2\big) \qquad \text{(Polarisaation identiteetti)}$$

R.
Sisätuloavaruudessa:

$$\begin{aligned} &(x+y, x+y) - (x-y, x-y) = \\ &(x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) - \\ &((x,x) + (x,-y) + (-y,x) + (y,y)) \\ &= 4(x,y). \end{aligned}$$

(c) Normi $\| x \|$ toteuttaa suunnikkaan identiteetti, jos ja vain jos polaarisaatio identitetti määrittele skalaari tulo (x, y) (bilineaarinen ja positiivinen) jolla $\| x \|^2 = (x, x)$.

R.

- Oletetaan, että normi $|| \cdot ||$ toteuttaa suunikasyhtälön

$$2||x||^2 + 2||y||^2 = ||x+y||^2 + ||x-y||^2. \tag{0.7}$$

Pitää tarkistaa, että polarisaation määrittelemä sisätulo (x, y) toteuttaa sisätulon ehdot.

- Koska

$$||(-1)(x-y)||^2 = ||x-y||^2, \tag{0.8}$$

on $(x, y) = (y, x)$. Lisäksi $(x, x) = ||x||^2$.

- $(x+y,z) \stackrel{?}{=} (x,z)+(y,z)$.
  Yhtälöstä (0.7) saaadaan

$$
\begin{aligned}
2||x+z||^2 + 2||y||^2 &= ||x+y+z||^2 + ||x+z-y||^2 \quad \text{ja} \\
2||y+z||^2 + 2||x||^2 &= ||x+y+z||^2 + ||y+z-x||^2
\end{aligned}
$$

  Laskemalla puolittain yhteen on

$$
\begin{aligned}
2||x+y+z||^2 = 2||x+z||^2 + 2||y+z||^2 + 2||x||^2 + 2||y||^2 \\
- ||x+z-y||^2 - ||y+z-x||^2.
\end{aligned} \tag{0.9}
$$

  Sijoittamalla tähän z:n paikalle $-z$ on

$$
\begin{aligned}
2||x+y-z||^2 = 2||x-z||^2 + 2||y-z||^2 + 2||x||^2 + 2||y||^2 \\
- ||x-z-y||^2 - ||y-z-x||^2.
\end{aligned} \tag{0.10}
$$

  Yhtälön (0.9) kaksi viimeistä termiä ovat yhtälön (0.10) kahden viimeisen termin vastalukuja ja yhtälön (0.8) avulla normien neliöt ovat samoja ja häviävät seuraavassa.
  Vähentämällä (0.9) ja (0.10) puolittain on

$$
\begin{aligned}
||x+y+z||^2 - ||x+y-z||^2 = {} & ||x+z||^2 + ||y+z||^2 + \\
& ||x||^2 + ||y||^2 \\
& - \frac{1}{2}||x+z-y||^2 - \frac{1}{2}||y+z-x||^2 - \\
& \{||x-z||^2 + ||y-z||^2 + ||x||^2 + ||y||^2 \\
& - \frac{1}{2}||x-z-y||^2 - \frac{1}{2}||y-z-x||^2\} \\
= {} & ||x+z||^2 + ||x-z||^2 + ||y+z||^2 + ||y-z||^2,
\end{aligned}
$$

  josta kohdan väite.
- $(\lambda x, y) \stackrel{?}{=} \lambda(x,y)$.
  Edellisestä kohdasta induktiolla seuraa, että $\lambda \in \mathbb{N}$ toimii. Jos $\lambda = -1$, on yhtälön (0.8) avulla

$$
\begin{aligned}
(-x,y) &= \frac{1}{4}(||-x+y||^2 - ||-x-y||^2) \\
&= \frac{1}{4}(||x-y||^2 - ||x+y||^2) = -(x,y).
\end{aligned}
$$

ja $\lambda \in \mathbb{Z}$ on ok.
Jos $\lambda = \frac{1}{n}$, on edellisestä

$$(x, y) = (n\frac{1}{n}x, y) = n(\frac{1}{n}x, y),$$

josta $(\frac{1}{n}x, y) = \frac{1}{n}(x, y)$, ja $\mathbb{Q}$ on tarkistettu. Koska kuvaus $\lambda \mapsto ||\lambda x||$ on jatkuva, on $\mathbb{R}$ ok.
Kompleksiluvuille tämä ei suoraan toimi. Mutta:
Jos $i = \sqrt{-1}$, on

$$(ix, iy) = (x, y),$$

josta

$$(x, iy) = -ii(x, iy) = -(iix, iy) = -(ix, y).$$

Kompleksikertoimille määritellään sisätulo edellisen sisätulon avulla avulla

$$< x, y >:= (x, y) + i(x, iy).$$

Tälle on

$$< ix, y >= (ix, y) + i(x, iy) = -(x, iy) + i(x, y) = i < x, y >$$

ja

$$< y, x >= (y, x) + i(y, ix) = (y, x) - i(iy, x) = \overline{< x, y >},$$

missä yläviiva on kompleksikonjugaatti. Muut ominaisuudet periytyvät $(\cdot, \cdot)$ sisätulolta.

- Toiseen suuntaan, jos polarisaatio määrittelee sisätulon (x, y), niin se määrittelee normin, joka toteuttaa suunikasyhtälön. Väite nähdään suoraan

$$(x + y, x + y) + (x - y, x - y) = \ldots = 2||x||^2 + 2||y||^2$$