HY Todennäköisyysteoria, syksy 2013, laskuharjoitukset 7 (23.10.2013)

1. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$,

   Olkoon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ satunnaismuuttujaa, jolla

   $$P\big(X_1 > t_1, \dots, X_n > t_n\big) = \exp\Bigg(-\lambda \sum_{i=1}^{n} t_n\Bigg) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \geq 0,$$

   jossa $\lambda > 0$ on parametri.

   (a) Osoita että $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ ovat P-riippumattomia

   (b) Olkoon

   $$Y_n = \min\big\{X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)\big\} \ .$$

   Laske $P(Y_n > t)$. Laske myös satunnaismuuttujan Y_n tiheysfunktio.

   (c) Olkoon $X_n^*(\omega) = \max\big\{X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)\big\}$
   Laske $P(X_n^* \leq t)$. Laske X_n^* myös satunnaismuuttujan tiheysfunktio.

   (d) Laske $\lim\limits_{n\to\infty} P\Bigg(\lambda X_n^* \leq t + \log(n)\Bigg)$.
   Vihje: $\big(1 + x/n\big)^n \longrightarrow \exp(x)$ kun $n \to \infty$.

2. Osoita:

   $$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} < \infty, \ \text{kun } s > 1 \ .$$

   $\zeta(s)$ kutsutaan Riemannin zeta funktioksi.
   Vihje

   $$\int_1^{\infty} x^{-s} dx \geq \sum_{n \geq 2} n^{-s}.$$

   Diskreettitodennäkoisyysavaruudessa $(\Omega = \mathbb{N}, \mathcal{F} = 2^{\mathbb{N}}, P)$, olkoon

   $$P(\{n\}) := n^{-s}/\zeta(s) \ .$$

   Laske $P(E_p)$ jossa p on alkuluku ja

   $$E_p = p\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : \ p \text{ jakaa } n \ \} \ .$$

   .

(b) Osoita että tapahtumat (E_p : p on alkuluku) ovat P-riippumattomia.

(c) Osoita Eulerin kaava

$$P(\{1\}) = 1/\zeta(s) = \prod_{p \text{ alkuluku}} (1 - p^{-s})$$

Vihje käytä riippumattomuutta.

(d) Osoita että ehdollisille todennäköisyydelle pätee

$$P(pq\mathbb{N}|p\mathbb{N}) = P(q\mathbb{N}).$$

(e) Olkoon X satunnaismuuttuja jolla $P(X = n) = n^{-s}/\zeta(s)$. Osoita

$$P(\{ \text{ ei ole olemassa } k > 1 \text{ jolla } k^2 \text{ jakaa } X \}) = 1/\zeta(2s)$$

(f) Olkoon X, Y P-riippumattomia jolla

$$P(X = n, Y = m) = P(X = n)P(Y = m) = \big(mn\big)^{-s}/\zeta(s)^2.$$

ja olkoon $R(\omega)$ satunnaismuuttujen $X(\omega)$ ja $Y(\omega)$:n suurin yhteinen jakaaja. Osoita:

$$\mathbb{P}(\{R = n\}) = n^{-2s}/\zeta(2s)$$

3. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$, tapahtumien jono jolla

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$$

Olkoon $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_n}(\omega)$.

Osoita että P-melkein varmasti raja-arvo $S_\infty(\omega) := \lim_{n\to\infty} S_n(\omega)$ on olemassa.

Vihje: Muista Borel Cantelli lemmat !

4. Olkoon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ riippumattomien ja samoin riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, jolla $P(X_n(\omega) \geq 0) = 1$ ja $E_P(X_n) = \infty$.

5. Osoita että jokaiselle $K > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > Kn) = \infty$$

Vihje käytä Fubinin lausetta.

6. Osoita: P-melkein varmasti

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_1(\omega)+X_2(\omega)+\cdots+X_{n-1}(\omega)+X_n(\omega)}{n} = +\infty$$

Käytä Borel Cantelli lemmaa.

7. (Vahva suurten lukujen laki, 4-momenttin ehdolla). Olkoon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Oletamme $E_P(X_1^4) < \infty$ ja $E_P(X_1) = 0$.

   Olkoon $S_n = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_n(\omega)$.

   (a) Laske $E_P(S_n^4)$. **Vihje**:

   $$E_P\big(S_n^4\big) = E_P\left(\left\{\sum_{i=1}^n X_i\right\}^4\right) = E_P\left(\sum_{i,j,k,l=1}^n X_iX_jX_kX_l\right) = \sum_{i,j,k,l=1}^n E_P(X_iX_jX_kX_l) = \dots$$

   (b) Arvioi Chebychevin epäyhtälöllä todennäköisyydet

   $$P(S_n > \varepsilon n)$$

   Vihje Käytä $E_P(S_n^4)$ momenttia.

   (c) Osoita Borel Cantelli lemman avulla että P-melkein varmasti

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0$$

   Vihje Osoita

   $$P\big(\{\ \omega : S_n(\omega) > n\varepsilon \text{ äärettömästi monille } n\text{:lle }\}\big) = 0$$

   Huomautus Tästä lauseesta on olemassa vielä yleisempi versio, jossa $E_P(|X_1|) < \infty$ on riittävä ehto.