HY Todennäköisyysteoria, syksy 2013, laskuharjoitukset 6 (16.10.2013)

1. Osoita
   (a) Kun $\big(A_i : i \in \mathbb{N}\big) \subseteq \mathcal{F}$ on tapahtumien jono jolla $P(A_i \cap A_k) = 0$, $i \neq j$, $P(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = 1$, seuraa $P(B) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P(B|A_i)P(A_i)$
   (b) Kun $P(B \cap C) > 0$, siitä seuraa $P(A|B\cap C) = \frac{P(A\cap B|C)}{P(B|C)}$
   (c)
   $$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\dots P(A_n|\ A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

2. Todennäköisyysavaruudella $(\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ määritelään Poissonin todennäköisyysmittojen perhe $\{P_\lambda(d\omega) : \lambda > 0\}$ jossa
   $$P_\lambda(A) = \exp(-\lambda) \sum_{n\in B\cap\mathbb{N}} \frac{\lambda^n}{n!}$$
   jossa $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
   (a) Osoita että $\forall\lambda > 0$, $P_\lambda(d\omega) \ll P_1(d\omega)$ ja $P_1(d\omega) \ll P_\lambda(d\omega)$, eli kaikilla P_λ mitoilla on samat nolla joukkoja.
   (b) Laske Radon-Nykodim derivaatta
   $$Z_\lambda(n) = \frac{dP_\lambda}{dP_1}(n) \quad n \in \mathbb{N},$$
   $$Z_\lambda(\omega) = \text{ mielivaltainen, kun } \omega \notin \mathbb{N},$$
   jolle päätee mitanvaihto-kaava
   $$E_{P_1}(Z_\lambda \mathbf{1}_A) = P_\lambda(A) \quad \forall\lambda > 0, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$
   (c) Määritellään nyt satunnaismuuttuja $X(\omega) := \omega$. Laske ehdollinen todennäköisyys $P_\lambda(X = 1|X \geq 1)$, $\lambda > 0$.
   (d) Käsitellään nyt todennäköisyysavaruus $\Omega = \mathbb{R}^2$ σ-albegralla $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes 2}$, tulomitalla $\mathbb{P}_\lambda = P_\lambda^{\otimes 2} = P_\lambda \otimes P_\lambda$.
   Olkoon $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2$ ja satunnaismuuttujat $X_1(\omega) := \omega_1$ ja $X_2(\omega) = \omega_2$.
   Osoita että $\mathbb{P}_\lambda$ todennäköisyyden suhteen satunnaismuuttajat X_1 ja X_2 ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita Poissonin jakaumalla P_λ.
   Laske $\mathbb{P}_\lambda(X_1 = X_2)$.

(e) Laske ehdollinen todennäköisyys $\mathbb{P}_\lambda(X_1 = n | X_1 = X_2) \quad \forall n \ \in \mathbb{N}$

3. Olkoon $Y(\omega) \geq 0$ λ-eksponentiaalinen satunnaismuuttuja, jolla

$$P(Y > t) = \exp(-\lambda t), \quad t \geq 0$$

   (a) Laske λ-eksponentiaalisen jakauman tiheysfunktio.

   (b) Laske $E_\lambda(Y^n), \quad n \in \mathbb{N}$, Vihje: Laske ensin $E_P(Y)$, käytä osittaisintegrointi, ja sitten induktio.

   (c) Laske $E_\lambda\big(\exp(tY)\big), \quad t \in \mathbb{R}$.

   (d) Tarkistaa että kun $s, t > 0$, ehdolliselle todennäköisyydelle pätee

$$P_\lambda(Y > t + s | Y > s) = P_\lambda(Y > t).$$

4. Gaussisesta jakaumasta.

   (a) Osoita

$$2\pi = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) dx dy = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx\right)^2$$

   Vihje: Muuttujan vaihdolla $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta), \ r \geq 0$ $\theta \in [0, 2\pi)$.

   (b) On olemassa satunnaismuuttuja $G(\omega)$ jolla

$$P(G \leq x) = \Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \tag{0.1}$$

   G:n jakauma kutsutaan standardiseksi Gaussiseksi jakaumaksi.
   Vihje Valitse todennäköisyysavaruudeksi $(\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

   (c) Mikä on $G(\omega)$:n jakauman tiheysfunktio ?

5. Olkoon $m \in R$ ja $\sigma > 0$, ja $X(\omega) = m + \sigma G(\omega)$.

   (a) Laske X:n jakauman kertymäfunktio $P(X \leq x)$.

   (b) Laske X:n jakauman tiheysfunktio.

   (c) Todennäköisyysavaruudessa $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, laske Radon-Nikodymin derivaatta (uskottavuusosamäärä)

$$\frac{dP_X}{dP_G}(x)$$

jossa $P_X(B) = P(X \in B)$ ja $P_G(B) = P(G \in B)$.
Vihje Uskottavuusosamäärä toteuttaa mitanvaihdon kaavaa

$$\int_{\mathbb{R}} h(x) P_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} h(x) \frac{dP_X}{dP_G}(x) P_G(dx)$$

kaikille Borel-mitallisille funktioille $h(x) \geq 0$.

6. (a) Laske odotusarvo

$$E_P(\exp(\lambda G)) = \int_{\Omega} \exp(\lambda G(\omega)) P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} \exp(\lambda x) P_G(dx)$$

   (b) Laske myös odotusarvo $E_P(\ \exp(\lambda X))$ jossa $X(\omega) = m + \sigma G(\omega)$.