HY Todennäköisyysteoria, syksy 2013, laskuharjoitukset 5 (9.10.2013)

1. - Todista Checbychevin epäyhtälö: jos $X(\omega) \geq 0$ P-melkein varmasti,

   $$P(X > t) \leq \frac{E_P\big(X\big)}{t}$$

   Vihje

   $$0 \leq t\,\mathbf{1}(X(\omega) > t) \leq X(\omega)$$

   - Osoita myös Chentsovin epäyhtälö

   $$P(X > t) \leq \inf\Big\{ \exp(-\lambda t) E_P\big(\exp(\lambda X)\big) :\ \lambda > 0 \Big\}$$

   Olkoon satunnaismuuttuja $X(\omega)$ Poisson(θ) jakautunut, jossa $\theta > 0$ on parametri, eli

   $$P_\theta\big(X = n\big) = \exp(-\theta)\frac{\theta^n}{n!} \quad n \in \mathbb{N}$$

   - Laske $E_\theta(\exp(\lambda X))$, $\forall \lambda > 0$.
   - Arvioi yläpuolelta $P_\theta\big(X > t\big)$ Chentsovin epäyhtälöllä.

2. Olkoon $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, siis $E_P(|X|) < \infty$. Osoita että

   $$E_P\big(|X|\mathbf{1}(|X| > n)\big) \downarrow 0 \text{ kun } n \uparrow \infty\ .$$

   Vihje

   $$0 \leq |X(\omega)|\mathbf{1}(|X(\omega) \leq b|) \uparrow |X(\omega)|$$

   kun $n \uparrow \infty$. Muista monotoninen konvergenssin lause.

3. Olkoon $X(\omega) \in \mathcal{Y}F$, (yksinkertäinen satunnaismuuttuja) osoita että $E_P(X)$ ei riipu satunnaismuuuttujan esityksestä.

   Vihjeet Satunnaismuuttujalla on esitykset:

   $$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\mathbf{1}_{B_i}(\omega) = \sum_{t \in \mathbb{R}} t\,\mathbf{1}_{I_t}(\omega),$$
   $$I_t = \{\omega : X(\omega) = t\}, \quad t \in \mathbb{R}$$

jossa tapahtumat B_i eivät ole vältämättä erillisiä ja arvot x_i eivät ole vältämättä eriläisiä. Huomataan että oikean puoleen summa on yli äärellisen indeksijoukon koska $X(\omega)$ saa äärellistä monta arvoa. Osoitamme että

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \, P(B_i) = \sum_{t\in\mathbb{R}} t \, P(\{\omega : X(\omega) = t\})$$

ja siksi $E_P(X)$ on hyvin määritelty.

4. Olkoon $\Omega = [0,1]$ todennäköisyysavaruus, varustettuna Borelin σ-algebralla Lebesguen todennäköisyysmitalla $P(d\omega) = d\omega$.

   - Osoita että satunnaismuuttujen jonolle

     $$X_n(\omega) = n \, \mathbf{1}_{[0,n^{-1}]}(\omega), \quad n = 1,2,\ldots$$

     $$\lim_{n\to\infty} E_P(X_n) \neq E_P\left(\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)\right)$$

   - Olkoon

     $$Y(\omega) := \sup_{n\in\mathbb{N}} X_n(\omega), \quad \omega \in (0,1]$$

     Osoita että $E_P(Y) = \infty$, ja siksi Lebesguen dominoidun konvegenssin lause ei ppysty soveltamaan

   - Voidaanko soveltaa Fatoun lemmaa ?

5. Tehtävä numeroituvuudesta:

   - Osoita: tauluun=$[0,1]^2$ mahtuu ylinumeroituva määrä erillisiä nollamerkin='O' eli ympyrän muotoisia käyriä, (siis ympyrä-käyrät saavat olla myös sisäkkäisiä kun eivät koske toisiaansa).
   - Osoita että taulussa = $[0,1]^2$ tai vaikka = $\mathbb{R}^2$ avaruudessa mahtuu korkeintaan numeroituva määrää erillisiä '8' eli '∞'-merkkin muotoisia käyriä (siis '8'- muotoisia käyrät saavat olla myös sisäkkäisiä kun eivät koske toisiaansa).