HY Todennäköisyysteoria, syksy 2013, laskuharjoitukset 4 (2.10.2013)

1. Olkoon $\mathcal{Q}$ todennäköisyysmittojen joukko todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F})$.

   Osoita:

   $$c(A) := \sup_{Q \in \mathcal{Q}} Q(A), \quad A \in \mathcal{F}$$

   on ulkomitta eli toteuttaa

   - $c(\emptyset) = 0$,
   - $c(A) \leq c(B)$ kun $A \subseteq B$
   - c on ali-σ-additiivinen.

2. Olkoon $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ei-vähenevä funktio, $F(t) \geq F(s)$ kun $t \geq s$. Osoita että F on Borel mitallinen, eli Borelin joukon käänteiskuva on Borelin joukko.

   Vihje: määritellään yleistetty käänteisfunktio

   $$\overleftarrow{F}(t) = \sup\{x : F(x) \leq t\}$$

   Ei-vähenevän funktion F käänteisfunktio ei ole yksikäsitteinen silloin kun $F(x)$ vakio jossakin välissä.

   Osoita että kun $q \in \mathbb{Q}$

   $$\{t : F(t) \leq q\} = \big(-\infty, \overleftarrow{F}(q)\big]$$

   vai

   $$\{t : F(t) \leq q\} = \big(-\infty, \overleftarrow{F}(q)\big)$$

   ja näytä että tämä riittää Borelin-mitallisuuteen.

3. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F})$ todennäköisyysavaruus ja $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$ äärellisesti additiivinen todennäköisyys. Osoita että P on σ-additiivinen jos ja vain jos

   $$\big(A_n : n \in \mathbb{N}\big) \subseteq \mathcal{F} \text{ ja } A_n \downarrow \emptyset \implies \lim_{n \to \infty} P(A_n) = 0\ .$$

4. Osoita että Riemann-Stieltjesin integraali on olemassa kun funktio $H(y)$ on ei-vähenevä. Vihje: Osoita ensin että epäjatkuvuus pisteiden joukko

$$D := \left\{ \ y : H(y-) := \lim_{x \uparrow y} H(x) < H(y+) = \lim_{x \downarrow y} H(x) \right\}$$

on korkeintaan mumeroituva. Käytä sitten hajotelma

$$H(x) = \left(H^c(x) - \sum_{y \le x} \Delta H(y) \right) \quad \text{jossa} \quad \Delta H(y) := H(y+) - H(y-)$$

jossa näytät että $H_c(x)$ on ei-vähenevä ja jatkuva. Tämä yleistyy suoraan tapaukseen jossa $H(y) = (H^{\oplus}(y) - H^{\ominus}(y))$, $G(y) = (G^{\oplus}(y) - G^{\ominus}(y))$, jossa $H^{\oplus}, H^{\ominus}, G^{\oplus}, G^{\ominus}$, ovat ei-väheneviä.

5. Osoite että jos $H(x)$ on (palottain) jatkuva ja $G(x)$ on derivoituva jatkuvalla derivaatalla $G'(x)$, Riemannin Stieltjes integraaleille pätee

$$\int_a^b H(x) G(dx) = \int_a^b H(x) G'(x) dx$$

6. Olkoon $X(\omega), X_n(\omega), n \in \mathbb{N}$ satunnasimuuttujat jolla $X_n(\omega) \to X(\omega)$ P-melkein varmasti.

   Osoita että P-melkein varmasti myös Cesaron keskiarvot suppenevat

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) = X(\omega) \qquad P\text{-melkein varmasti}$$

   Vihje: osoita Cesaron' keskiarvo lause deterministisille jonoille.

7. Olkoon kuvaus $g : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ jossa $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ ovat mielivaltaisia joukkoja. Osoita:

$$\sup_{x \in \mathbb{X}} \inf_{y \in \mathbb{Y}} g(x,y) \ \le \ \inf_{y \in \mathbb{Y}} \sup_{x \in \mathbb{X}} g(x,y) \ ,$$

   Päinvastainen epäyhtälö ei päde ilman lisäoletuksia.