**HY Todennäköisyysteoria, syksy 2013, laskuharjoitukset 3 (25.9.2013)**

1. Osoita: $\mathbb{R}^d$:n Borelin $\sigma$-algebralle pätee

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d} = \underbrace{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})}_{d-\text{kertaa}}$$

   **Vihje** Jos $U \subseteq \mathbb{R}^d$ on avoin, $\forall x = (x_1, \dots, x_d) \in U \; \exists r = (r_1, \dots, r_d), q = (q_1, \dots, q_d) \in \mathbb{Q}^d$ jolla $r_i < x_i < q_d$ ja

$$(r, q) = (r_1, q_1) \times \cdots \times (r_d, q_d) \subseteq U$$

2. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$, additiivinen mitta $P$ on $\sigma$-additiivinen jos ja vain jos kaikille jonoille $(A_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$ jolla $A_n \downarrow \emptyset$, ali $A_n \supseteq A_{n+1}$ ja $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$, seuraa $P(A_n) \downarrow 0$.

   Tämä ei päde äärettömälle mitalle, esimerkiksi Lebesguen mitalle $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ avaruudessa. Keksi vastaesimerkki.

3. Olkoon $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ binaari jonojen $\omega = (\omega_n : n \in \mathbb{N})$ avaruus.

   Määritellään sylinterin algebra $\mathcal{F}_n$, jossa $A \in \mathcal{F}_n$ jos ja vain jos a set $A_n \subseteq \{0, 1\}^n$ such that

$$A = \{\omega : (\omega_1, \dots, \omega_n) \in A_n\}.$$

   joillekin $A_n \subseteq \{0, 1\}^n$.

   - $\mathcal{F}_n$ on myös $\sigma$-algebra, selitä miksi.
   - Olkoon $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n\right)$, eli pienin $\sigma$-algebra joka sisältää kaikki sylinteri-$\sigma$-algebrat.

     Olkoon

$$\begin{aligned} L &= \{\omega : \exists \lim_{n \to \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \omega_i\} = \\ &= \{\omega : \limsup_{n \to \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \omega_i = \liminf_{n \to \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \omega_i\} \end{aligned}$$

     Osoita että $L \in \mathcal{F}_\infty$, mutta $L \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$.

**Vihje:** Osoita että kun $q_1 < q_2 \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ ,

$$\{\omega : \limsup_n n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \in (q_1, q_2)\} \in \mathcal{F}_\infty \text{ ja}$$

$$\{\omega : \liminf_n n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \in (q_1, q_2)\} \in \mathcal{F}_\infty$$

4. Olkoon $F : \mathbb{R}^d \longrightarrow [0,1]$ jolla

   - $F(t_1, \ldots, t_d)$ ei-vähenevä jokaisen koordinaatin $t_i$:n suhteen.
   - $F(t_1, \ldots, t_d)$ on oikealta jatkuva jokaisen koordinaatin $t_i$:n suhteen.
   - $\lim_{x \to -\infty} F(t_1, \ldots, t_{i-1} \underbrace{, x,}_{i-\text{koordinaatti}} t_{i+1}, \ldots, t_n) = 0,$

     $\forall 1 \le i \le d,\ t_1, \ldots t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n.$
   - $1 = F(\infty, \infty, \ldots, \infty) := \lim_{t_1 \uparrow +\infty, \ldots t_1 \uparrow +\infty} F(t_1, t_2, \ldots, t_d)$
   - Osoita että on olemassa yksikäsitteinen todennäköisyysmitta $P : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0,1]$ jolla

     $$P\big((-\infty, t_1] \times \cdots \times (-\infty, t_d]\big) = F(t) \quad \forall t = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d.$$

     Vihje: Dimensiossa $d = 1$, väite on osoitettu luennolla Caratheodoryn lauseen avulla. Vie läpi täsmälleen sama todistus $d$-ulotteisessa tapauksessa.

5. Olkoon $\big(K(i \to j)\big)_{i,j \in \mathbb{N}}$ ääretön-ulotteinen matriisi,

   jossa $K(i \to j) \in [0,1]$, ja $\sum_{j \in \mathbb{N}} K(i \to j) = 1\ \forall i \in \mathbb{N}$.

   Tulkinta: jokaiselle $i \in \mathbb{N}$, $K(i \to \cdot)$ on todennäköisyy diskreetti-avaruudessa $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$. Olkoon myös $\pi : \mathbb{N} \to [0,1]$ todennäköisyys jolla

   $$\sum_{i \in \mathbb{N}} \pi(i) = 1.$$

   - Osoita että vektori matriisi tulo

     $$(\pi K)(i) = \sum_{\ell} \pi(\ell) K(\ell \to i) \quad \ell \in \mathbb{N}$$

     on todennäköysyys.

Merkitään myös matriisin potenssi

$$K^0(i\to j)=\delta_{ij},\quad K^1(i\to j)=K(i\to j),\ K^2(i\to j)=\sum_{\ell\in\mathbb{N}}K(i\to\ell)K(\ell\to j),$$

$$K^n(i\to j)=\sum_{\ell\in\mathbb{N}}K(i\to\ell)K^{n-1}(j\to\ell)=$$

$$\sum_{\ell_1,\dots,\ell_{n-1}\in\mathbb{N}}K(i\to\ell_1)K(\ell_1\to\ell_2)\dots K(\ell_{n-2},\ell_{n-1})K(\ell_{n-1},j)$$

Osoita että $K^n(i\to\cdot)$ on todennäköisyys.

Olkoon myös $\pi:\mathbb{N}\to[0,1]$ todennäköisyys jolla

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\pi(i)=1.$$

Merkitään matriisi-tulo

$$(\pi K^n)(i)=\sum_{\ell}\pi(\ell)K(\ell\to i)\quad ß\in\mathbb{N}$$

Osoita että $\pi K(\cdot)$ on todennäköisyys.

Konstruoimme Kolmogorovin laajennuksen avulla todennäköisyysmitta avaruudessa $\mathbb{N}^{[0,+\infty)}$ jossa $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$ on aikaparametri. Olkoon

$$Q_t(i\to j)=\exp(-t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}K^n(i\to j)$$

- Osoita että kaikille $i\in\mathbb{N},t\in\mathbb{R}_+$, $Q_t(i\to\cdot)$ on todennäköisyys.
- $\forall n\in\mathbb{N}$, $\ell_0,i_1\dots,i_n\in\mathbb{N},0\le t_1\le\dots\le t_n\in\mathbb{R}^+$, merkitään

$$P_{t_1,\dots,t_n}(i_1,\dots,i_n)=\sum_{\ell}\pi(\ell)Q_{t_1}(\ell\to i_1)Q_{t_2-t_1}(i_1\to i_2)\dots Q_{t_n-t_{n-1}}(i_{n-1}\to i_n)$$

ja kun $t_1,\dots,t_n$ eivät ole järjestyksessä, yksinkertäisesti otetaan

$$P_{t_1,\dots,t_n}(i_1,\dots,i_n)=P_{\sigma(t_1),\dots,\sigma(t_n)}(\sigma(i_1),\dots\sigma(i_n))$$

jossa $\sigma:\{1,\dots,n\}\longrightarrow\{1,\dots,n\}$ on järjestävä permutaatio jolla $\sigma(t_1)\le\sigma(t_2)\le\dots\le\sigma(t_n)$.

- Osoita että äärellisten ulotteisten jakaumien perhe

$$\left\{ P_{t_1,\dots,t_n} : n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

toteuttaa Kolmogorovin laajennus lauseen oletusta ja on olemassa todennäköysyysmitta $\mathbb{P}$ todennäköisyysavaruudessa $\Omega = \mathbb{N}^{\mathbb{R}_+}$ joka koostu kuvauksista $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{N}$, varustettuna cylinterien virittämälla $\sigma$-algebralla $\sigma(\mathcal{C})$, jolla

$$\mathbb{P}\big(\{\omega : \omega(t_1) = i_1, \dots, \omega(t_n) = i_n\}\big) = P_{t_1,\dots,t_n}\big(i_1, \dots, i_n\big)$$

6. Olkoon $\Omega = \mathbb{R}^{[0,1]}$ joka koostuu kuvauksista $\omega : [0,1] \to \mathbb{R}$.

- Osoita että joukko

$$C([0,1]) = \left\{ \omega : \ t \mapsto \omega(t) \text{ on jatkuva kuvaus} \right\}$$

ei kuulu cylinterien virittämään $\sigma$-algebraan $\sigma(\mathcal{C})$.
Vihje: Osoita ensin että kun $\{ t_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq [0,1]$ on jono jolla $\lim_{n\to\infty} t_n = t \in [0,1]$, tapahtuma

$$C(\{ t_n\}) = \left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \omega(t_n) = \omega(t) \right\} \in \sigma(\mathcal{C}).$$

- Olkoon

$$B_\infty(0,\varepsilon) = \left\{ \omega \in \Omega : \sup_{t\in[0,1]} |\omega(t)| \le \varepsilon \right\}$$

Osoita että $B_\infty(0,\varepsilon)$ ei kuulu $\sigma$-algebraan $\sigma(\mathcal{C})$.
Vihje: Osoita ensin että

$$\left\{ \omega \in \Omega : \sup_{q\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} |\omega(q)| \le \varepsilon \right\} \in \sigma(\mathcal{C})$$