HY Todennäköisyysteoria, syksy 2013, laskuharjoitukset 2 (18.9.2013)

1. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, määritellään mielivaltaisen joukon $G \subseteq \Omega$ ulkomitta

$$P^*(G) = \inf_{\{F_n\}} \sum_{n=1}^{\infty} P(F_n)$$

jossa infimum otetaan yli kaikkien numeroituvien mitallisten peitteiden $\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$ jolla $G \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Caratheodoryn laajennuslauseen todistuksessa osoitettiin että P^* on ulkomitta, siis on numeroituvasti sub-σ-addiitivinen, kasvava, ja $P^*(\emptyset) = 0$.

Määriteltiin myös σ-algebra $\mathcal{L}$ joka koostuu kaikista joukoista $A \subseteq \Omega$ jotka *jakaavat siististi* ulkomitan P^* seuraavalla tavalla

$$P^*(G) = P^*(G \cap A) + P^*(G \cap A^c) \quad \forall G \subseteq \Omega$$

$\mathcal{L}$ jäsenet kutsutaan myös P^*-mitallisiksi. Olemme myös osoittaneet että $P^* : \mathcal{L} \mapsto [0, 1]$ on σ-additiivinen todennäköisyysmitta.

Määritellään nyt joukkoperheet

$$\mathcal{F}^P = \big\{A \subseteq \Omega : \exists B', B'' \in \mathcal{F} \text{ with } B' \supseteq A \supseteq B'' \text{ and } P(B' \setminus B'') = 0\big\},$$
$$\mathcal{N}^P = \big\{A \subseteq \Omega : \exists B \in \mathcal{F} \text{ with } B \supseteq A \text{ and } P(B) = 0\big\} \quad (\ P\text{-nolla joukot }\ )$$

(a) Osoita että jokaiselle joukolle $G \subseteq \Omega$, on olemassa joukko $F \in \mathcal{F}$ jolla $F \supseteq G$ ja $P(F) = P^*(G)$.

(b) Osoita että jokaiselle joukolle $G \in \mathcal{L}$, on olemassa joukko $E \in \mathcal{F}$ jolla $E \subseteq G$ and $P(E) = P^*(G)$.

Vihje: soveltakaa tehtävän (2) tulosta joukolle G^c ja käytä oletusta $G \in \mathcal{L}$.

(c) Osoita että $\mathcal{F}^P = \sigma(\mathcal{F}, \mathcal{N}^P)$. Tämä on σ-algebran $\mathcal{F}$ P-täydennyys P-nolla mittaisilla joukoilla.

(d) Osoita että $\mathcal{F}^P = \mathcal{L}$. Vihjeet: Osoittakseen että $\mathcal{N}^P \subseteq \mathcal{L}$, muista että ulkomitta P^* on kasvava ja subadditiivinen.

Osoittakseen että $\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{N}^P) \supseteq \mathcal{L}$, käytä tehtäviä 2,3.

2. Olkoon P todennäköisyysmitta avaruudessa $(\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, ja $F(t) := P((-\infty, t])$, joka kutsutaan todennäköisyysmitan kertymäfunktioksi. Osoita:

   (a) F on kasvava

   (b) F on oikealta jatkuva. Vihje: Käytä todennäköisyyden σ-additiivisuutta.

   (c)
   $$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 \ .$$

   (d) Keksi esimerkki jossa F ei ole jatkuva.
   Vihje: määritellään pistemassa $\delta_x(A) := \mathbf{1}(x \in A)$ jossa $x \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
   Osoita että $\delta_x(\cdot)$ on todennäköisyys. Mikä on sen kertymäfunktio?

3. Määritelmän mukaan avaruuden $\Omega = \mathbb{R}^d$ Borelin σ algebra on avomien joukkojen virittämä σ-algebra.

   Kun $t \in \mathbb{R}^d$, olkoon
   $$(-\infty, t] = \{s \in \mathbb{R}^d : \ s_i \le t_i, i = 1, \dots d\}$$

   Osoita että luokka
   $$\mathcal{I} = \big\{(-\infty, q], q \in \mathbb{Q}^d\big\}$$

   on π-luokka joka virittää Borelin σ-algebran.

   Vihje Jos U on avoin $\mathbb{R}^d$:ssa, ja Q on tiheä $\mathbb{R}$:ssa, $\forall x \in U \ \exists r, q \in \mathbb{Q}^d$ jolla $r < q$ (eli $r_i < q_i$ kun $i = 1, \dots, d$
   $$x \in (r, q) := (r_1, q_1) \times (r_2, q_2) \times \cdots \times (r_d, q_d) \subseteq U.$$