HY Todennäköisyysteoria, syksy 2013, laskuharjoitukset 1 (11.9.2013)

1. Olkoon Ω mielivaltainen joukko, 2^Ω merkitsee sen potenssijoukko, eli Ω:n alijoukkojen kokoelma. Määritellään alijoukkojen $A, B \subseteq \Omega$, *symmetrinen erotus*

   $$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{\omega : \omega \in A \text{ vai } \omega \in B \text{ mutta ei molemmissa } \}$$

   Näytä että potenssijoukko 2^Ω on **rengas** operatioiden Δ (summa) ja $\cap$ (tulo) suhteen. Eli

   - Esitä identiteetti jäsen Δ:n operaation suhteen,
   - Esitä identiteetti $\cap$:n operaation suhteen,
   - osoita että jokaisella jäsenillä on additiivinen inverssi,
   - osoita että Δ on assosiatiivinen ja distributiivinen ominaisuus on voimassa.

   Vihje : indikaattorille pätee

   $$\mathbf{1}_{(A\Delta B)} = \big(\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B\big) \bmod 2$$

2. Olkoon $\{\mathcal{G}_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$ saman joukon Ω:n σ-algebrien kokoelma jossa $\mathcal{I}$ on mielivaltainen indeksi joukko.

   Osoita että leikkaus

   $$\mathcal{G} := \bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} \mathcal{G}_\alpha$$

   on σ-algebra.

3. Todista väitteet:

   Mielivaltainen π(vastaavasti d)-luokkien, leikkaus on π(vastaavasti d)-luokka. Eli

   $$d(\mathcal{C}) = \bigcap_{d\text{-luokat } \mathcal{I} \supseteq \mathcal{C}} \mathcal{I}$$

on pienin $\mathcal{C}$:n sisältävä d-luokka, ja

$$\pi(\mathcal{C}) = \bigcap_{\pi\text{-luokat } \mathcal{J} \supseteq \mathcal{C}} \mathcal{J}$$

on pienin $\mathcal{C}$:n sisältävä π-luokka. Myös

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\sigma\text{-algebrat } \mathcal{A} \supseteq \mathcal{C}} \mathcal{A}$$

on pienin $\mathcal{C}$:n sisältävä σ-algebra.

4. Olkoon $E \subseteq \big(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}\big)$ kokoelma osajoukoista

$$(a_1, b_1] \cup (a_2, b_2] \cup \cdots \cup (a_n, b_n], \quad n \in \mathbb{N}$$

jossa $n \in \mathbb{N}$ and $a_i, b_i \in \big(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}\big)$, jossa

$$-\infty \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq +\infty,$$

Osoita että $\mathcal{E}$ on algebra, mutta ei ole σ-algebra.

5. Olkoon $\{\mathcal{A}_n : n \in \mathbb{N}\}$ saman tapahtumien joukon Ω:n kasvava algebrien jono, jossa $A_{n+1} \supseteq A_n$.

Osoita että yhdiste

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$$

on algebra.

Jos korvataan "algebrat" "σ-algebroilla" tämä väite ei välttämättä päde, esitä vastaesimerkki.

6. Olkoon $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq 2^\Omega$ alijoukkojen jono.

Osoita:

$$\limsup_n \mathbf{1}_{A_n}(\omega) = \mathbf{1}_{\limsup_n A_n}(\omega), \qquad \text{jossa } \limsup_n A_n = \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k.$$