HY Todennäköisyysteoria I , syksy 2013, ratkaisut laskuharjoitukset 7 (23.10.2013)

1. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$,

   Olkoon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ satunnaismuuttujaa, jolla

   $$P\big(X_1 > t_1, \dots, X_n > t_n\big) = \exp\Bigg(-\lambda \sum_{i=1}^{n} t_n\Bigg) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \geq 0,$$

   jossa $\lambda > 0$ on parametri.

   (a) Osoita että $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ ovat P-riippumattomia

   R Koska eksponentiaali faktorisoituu, $\forall n,\ t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$

   $$P\big(X_1 > t_1, \dots, X_n > t_n\big) = \prod_{i=1}^{n} \exp\Bigg(-\lambda t_n\Bigg) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i > t_i)$$

   siis (lyhyesti) tapahtumat $(\{\ \omega : X_n(\omega) > t_n\} : n \in 1, \dot{,} n)$ ovat P-riippumattomia.

   Koska avoimien välien kokoelma $\big\{\ (t_1, \infty) \times \cdots \times (t_n, \infty), t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}\big\}$ on π-luokka joka virittää Borelin tulo σ-algebran $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, Dyninkinin laajennus lauseesta seuraa että kun $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^)$, $i = 1, \dots, n$,

   $$P\big(X_1 \in B_1, \dots X_n \in B_n\big) = P(X_1 \in B_1) \times P(X_n \in B_n)$$

   siksi satunnaismuuttujen virittämien σ-algebrat $\sigma(X_i)$, $i \in \mathbb{N}$ ovat P-riipumattomia eli satunnaismuuttujat ovat P-riipumattomia.

   (b) Olkoon

   $$Y_n = \min\big\{X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)\big\}\ .$$

   Laske $P(Y_n > t)$. Laske myös satunnaismuuttujan Y_n tiheysfunktio.

   R P-riippumattomuuden nojalla, kun $t \geq 0$.

   $$P(Y_n > t) = P(X_1 > t, \dots, X_n > t) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i > t) = P(X_1 > t)^n =$$

   $$\exp(-\lambda t)^n = \exp(-n\lambda t)$$

Tiheysfunktio saadaan kertymäfunktion derivoimalla:

$$p_{Y_n}(t) = \frac{d}{dt}P(Y_n \le t) = \frac{d}{dt}P(Y_n \le t) = \frac{d}{dt}\big\{\ 1 - P(Y_n > t)\big\}$$
$$= -\frac{d}{dt}\big\{\ P(Y_n > t) = n\lambda \exp(-n\lambda t)$$

siis Y_n on myös eksponentiaalisesti jakautunut parametrilla $n\lambda$.

(c) Olkoon $X_n^*(\omega) = \max\big\{X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)\big\}$
Laske $P(X_n^* \le t)$. Laske X_n^* myös satunnaismuuttujan tiheysfunktio.
R P-riippumattomuuden nojalla, kun $t \ge 0$

$$P(X_n^* \le t) = P(X_1 \le t, \dots, X_n \le t) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le t) = P(X_1 \le t)^n$$
$$= \big(1 - \exp(-\lambda t)\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \exp(-k\lambda t)$$

(Newtonin binomi kaava). Tiheysfunktio on

$$\frac{d}{dt}\ P(X_n^* \le t) = n\big(1 - \exp(-\lambda t)\big)^{n-1} \exp(-\lambda t)\lambda$$
$$= \lambda \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-1} k \exp(-k\lambda t) = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} n \binom{n-1}{k} (-1)^k \exp(-(k+1)\lambda t)$$

(d) Laske $\lim_{n\to\infty} P\Bigg(\lambda X_n^* \le t + \log(n)\Bigg)$.
Vihje: $\big(1 + x/n\big)^n \to \exp(x)$ kun $n \to \infty$.
R $\forall t \ge 0$,

$$P\big(\lambda X_n^* \le t + \log n\big) = P\big(X_n^* \le (t + \log n)/\lambda\big)$$
$$= \Bigg(1 - \exp\big(t + \log n\big)\Bigg)^n = \Bigg(1 - \frac{\exp(-t)}{n}\Bigg)^n \longrightarrow \exp(-\exp(-t))$$

kun $n \to \infty$

2. Osoita:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} < \infty, \text{ kun } s > 1\ .$$

$\zeta(s)$ kutsutaan Riemannin zeta funktioksi.
R Koska $x^{-s} \geq n^{-s}$ kun $x \in (n, n+1]$, koska $\frac{d}{dx} x^{1-s} = (1-s)x^{-s}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} \leq \int_1^{\infty} x^{-s} dx = \frac{1}{1-s}\big(1^{-s} - \infty^{-s}\big) = \frac{1}{1-s} < \infty$$

Diskreettitodennäkoisyysavaruudessa $(\Omega = \mathbb{N}, \mathcal{F} = 2^{\mathbb{N}}, P)$, olkoon

$$P(\{n\}) := n^{-s}/\zeta(s) \ .$$

Laske $P(E_m)$ jossa

$$E_m = m\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : \ m \text{ jakaa } n \ \} \ .$$

R

$$P(m\mathbb{N}) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \in \mathbb{N}} (mn)^{-s} = m^{-s} \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-s} = m^{-s} \frac{\zeta(s)}{\zeta(s)} = m^{-s}$$

(b) Osoita että tapahtumat E_p ja E_q ovat P-riippumattomia kun p ja q ovat alkulukuja :
R

$$P\big(p\mathbb{N} \cap q\mathbb{N}\big) P(pq\mathbb{N}) = (pq)^{-s} = P(p\mathbb{N}) P(q\mathbb{N})$$

(c) Osoita Eulerin kaava

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ alkuluku}} (1 - p^{-s}) \tag{0.1}$$

Vihje käytä riippumattomuutta. **R** Koska tapahtumat (E_p : p on alkuluku) ovat P-riippumattomia, näin ovat niiden komplementtit:

$$\prod_{p \text{ alkuluku}} (1 - p^{-s}) = \prod_{p \text{ alkuluku}} P(E_p^c) = P\Bigg(\bigcap_{p \text{ alkuluku}} E_p^c \Bigg) = P(\{\ 1\}) = \frac{1}{\zeta(s)}$$

koska 1 on aino luku joka ei ole jaettavissa alkuluvuilla.

(d) Osoita että ehdollisille todennäköisyydelle pätee kaikille $n, m \in \mathbb{N}$ (ei välttämättä alkulukuja)

$$P(nm\mathbb{N} | m\mathbb{N}) = P(n\mathbb{N}) \tag{0.2}$$

R Suoraan määritelmästä

$$P(nm\mathbb{N}|m\mathbb{N}) = \frac{\sum_{k \in \mathbb{N}} (nmk)^{-s}}{\zeta(s)} \frac{\zeta(s)}{\sum_{h \in \mathbb{N}} (mh)^{-s}} = \left(\frac{nm}{m}\right)^{-s} = n^{-s}$$

(e) Olkoon X satunnaismuuttuja jolla $P(X=n)=n^{-s}/\zeta(s)$. Osoita

$$P(\{\text{ ei ole olemassa } k>1 \text{ jolla } k^2 \text{ jakaa } X\ \}) = 1/\zeta(2s)$$

R Koska

$$\bigcap_{k>1}\Big(k^2\mathbb{N}\Big)^c = \bigcap_{q\text{alkuluku}}\Big(q^2\mathbb{N}\Big)^c, \text{ siitä seuraa}$$

$\{$ ei ole olemassa $k>1$ jolla k^2 jakaa $X\ \Big\} =$

$$\Big\{\text{ ei ole olemassa alkuluku } q \text{ jolla } q^2 \text{ jakaa } X\ \Big\} = \bigcap_{q\text{ alkuluku}}\Big(q^2\mathbb{N}\Big)^c$$

ja tapahtumien $\{E_q :\ q$ on alkuluku$\}$ P-riippumattomuuden nojalla

$$P\big(\{\text{ ei ole olemassa } k>1 \text{ jolla } k^2 \text{ jakaa } X\ \}\big)$$
$$= \prod_{q\text{ alkuluku}}\big(1-P(q^2\mathbb{N})\big) = \prod_{q\text{ alkuluku}}\big(1-q^{-2s}\big) = 1/\zeta(2s)$$

jossa viimeinen yhtälö seuraa Eulerin kaavasta (0.1).

(f) Olkoon X, Y P-riippumattomia jolla

$$P(X=n, Y=m) = P(X=n)P(Y=m) = \big(mn\big)^{-s}/\zeta(s)^2, \quad \forall n,m\in\mathbb{N}$$

ja olkoon $R(\omega)$ satunnaismuuttujen $X(\omega)$ ja $Y(\omega)$:n suurin yhteinen jakaaja. Osoita:

$$\mathbb{P}(\{R=n\}) = n^{-2s}/\zeta(2s)$$

R

$P(\{R=n\}) =$
$P\big(X\in n\mathbb{N}, Y\in n\mathbb{N},$ ei ole olemassa q alkuluku jolla $X\in nq\mathbb{N}$ ja $Y\in nq\mathbb{N}\ \big)$

Käytämme ehdollista todennäköisyyttä:

$$\begin{aligned}
&P(R=n) = \\
&P(X\in n\mathbb{N}, Y\in n\mathbb{N})P(R=n|\ X\in n\mathbb{N}, Y\in n\mathbb{N}) = \\
&P(X\in n\mathbb{N})P(Y\in n\mathbb{N})P(R=n|\ X\in n\mathbb{N}, Y\in n\mathbb{N}) \\
&= n^{-2s}P(R=n|\ X\in n\mathbb{N}, Y\in n\mathbb{N})
\end{aligned}$$

Nyt X/n ehdolla $X \in n\mathbb{N}$ ja Y/n ehdolla $Y \in n\mathbb{N}$ ovat P-riippumattomia ja (0.2) nojalla ovat samoin jakautuneita kuten alkuperäisiä X ja Y satunnaismuuttujia.

$P(R = n|\ X \in n\mathbb{N}, Y \in n\mathbb{N}) =$
$P\big(\{\ \text{ei ole olemassa } k \in \mathbb{N} \text{ jolla } X \in nk\mathbb{N} \text{ ja } Y \in nk\mathbb{N} \mid\ X \in n\mathbb{N}, Y \in n\mathbb{N}\}\big) =$
$P\big(\{\ \text{ei ole olemassa } q \text{ alkuluku jolla } X \in nq\mathbb{N} \text{ ja } Y \in nq\mathbb{N}\ \}\big|\ X \in n\mathbb{N}, Y \in n\mathbb{N},\big)$

$$= P\bigg(\{\ \text{ei ole olemassa } q \text{ alkuluku jolla } X \in q\mathbb{N} \text{ ja } Y \in q\mathbb{N}\ \}\bigg)$$

$$= P\bigg(\bigcap_{q \text{ alkuluku}} \big(\{\ X \in q\mathbb{N}\} \cap \{\ Y \in q\mathbb{N}\}\big)^c\bigg)$$

$$= \prod_{q \text{ alkuluku}} P\bigg(\big(\{\ X \in q\mathbb{N}\} \cap \{\ Y \in q\mathbb{N}\}\big)^c\bigg)$$

$$= \prod_{q \text{ alkuluku}} \bigg(1 - P(X \in q\mathbb{N})P(Y \in q\mathbb{N})\bigg)$$

$$= \prod_{q \text{ alkuluku}} \bigg(1 - q^{-2s}\bigg) = 1/\zeta(2s)$$

3. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$, tapahtumien jono jolla

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$$

Olkoon $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_n}(\omega)$.

(a) Osoita että P-melkein varmasti raja-arvo $S_\infty(\omega) := \lim_{n\to\infty} S_n(\omega)$ on olemassa.

R Borel Cantelli lemmasta seuraa

$$P\big(\limsup A_n\big) = P\big(\{\omega \in A_n \text{ äärettömän monille n:lle }\ \big) = 0$$

siksi P-melkein varmasti on olemassa $N(\omega)$ jolla $\omega \notin A_n\ \forall n \geq N(\omega)$, josta seuraa että on sarja $S_n(\omega)$ ei enää muutu kun $n > N(\omega)$ ja siksi $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(\omega)$ on olemassa P-melkein varmasti.

(b) Olkoon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ riippumattomien ja samoin riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, jolla $P(X_n(\omega) \geq 0) = 1$ ja $E_P(X_n) = \infty$.

(c) Osoita että jokaiselle $K > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > Kn) = \infty$$

R Olkoon $X(\omega) = X_1(\omega)$, $F_X(dt) = P(X_1 \le t)$. Fubinin lauseen mukaan voidaan vaihtaa integroinnnin järjestystä

$$\infty = E(X) = \int_0^{\infty} t F_X(dt) = \int_0^{\infty} \biggl(\int_0^t ds \biggr) F_X(dt)$$
$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \mathbf{1}(s \le t) ds F_X(dt) =$$
$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \mathbf{1}(s \le t) F_X(dt) ds = \int_0^{\infty} \biggl(\int_s^{\infty} F_X(dt) \biggr) ds$$
$$= \int_0^{\infty} (1 - F_X(s)) ds = \int_0^{\infty} P(X > s) ds = \int_0^{\infty} P(X \ge s) ds$$

jossa viimeinen yhtälö seuraa koska kuvays $s \mapsto P(X > s)$ on ei-kasvava ja siksi sen epäjatkuvuuden pisteiden joukko on korkeintaan numeroituva, ja se on 0-mittainen Lebesguen mitan suhteen. Kun vakio $K > 0$ myös $E_P(X/K) = E_P(X)/K = +\infty$ ja

$$\infty = E_P(X)/K = E_P(X/K) = \int_0^{\infty} P(X > sK) ds \le 1 + \int_1^{\infty} P(X > sK) ds$$
$$\le 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(X > nK) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P\biggl(\frac{X_n}{n} > K \biggr)$$

jossa viimeinen yhtälö seuraa koska satunnaismuuuttujat ovat samoin jakautuneuta.

(d) Osoita: P-melkein varmasti

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_{n-1}(\omega) + X_n(\omega)}{n} = +\infty$$

Käytä Borel Cantelli lemmaa.

R Koska satunnaismuuttujat X_n ovat P-riippumattomia, tapahtumat $P(X_n > nK)$ ovat P-riippumattomia ja toinen Borel Cantelli lemmasta seuraa

$$P\biggl(\limsup_{n \to \infty} \biggl\{ \omega : \frac{X_n(\omega)}{n} > K \biggr\} \biggr) = 1 \quad \forall K \in \mathbb{N}$$

josta seuraa

$$P\left(\bigcap_{K\in\mathbb{N}} \limsup_{n\to\infty}\left\{ \omega : \frac{X_n(\omega)}{n} > K\right\}\right) = 1$$

Koska

$$\frac{S_n(\omega)}{n} = \left(\frac{S_{n-1}(\omega)}{n-1}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right) + \frac{X_n(\omega)}{n}$$

jossa $(n-1)/n \to 1$, seuraa että

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} \Longleftarrow \lim_{n\to\infty} \frac{X_n(\omega)}{n} = 0$$

mutta P-melkein varmasti näin ei tapahdu koska $\forall K\ X_n(\omega)/n > K$ äärettömän monille n:lle.

4. (Vahva suurten lukujen laki, 4-momenttin ehdolla). Olkoon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Oletamme $E_P(X_1^4) < \infty$ ja $E_P(X_1) = 0$.

   Olkoon $S_n = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_n(\omega)$.

   (a) Laske $E_P(S_n^4)$. **Vihje**:

   $$E_P\big(S_n^4\big) = E_P\left(\left\{\sum_{i=1}^n X_i\right\}^4\right) = E_P\left(\sum_{i,j,k,l=1}^n X_iX_jX_kX_l\right) = \sum_{i,j,k,l=1}^n E_P(X_iX_jX_kX_l) = \ldots$$

   R Todistetaan myöhemmin luennolla että $L^p(\Omega,\mathcal{F},P) \subseteq L^q(\Omega,\mathcal{F},P)$ kun $q \le p$ ja P on todennäköisyys mitta (tai äärellinen mitta μ, kuitenkin tämä ei päde kun $\mu(\Omega) = \infty$).
   Koska $E_P(X^4) < \infty$ myös $E_P(|X|^p) < \infty \quad \forall p \le 4$. Huomataan että

   $$\sum_{i,j,k,l=1}^n E_P(X_iX_jX_kX_l) = \sum_{i,j=1}^n E_P(X_i^2X_j^2) =$$
   $$\sum_{i}^n E_P(X_i^4) + 2\sum_{i=1}^n\sum_{j<i} E_P(X_i^2X_j^2) = nE_P(X_1^4) + n(n-1)E_P(X_1^2)^2$$

   koska kun jokin indeksi i on eri kun muut, siis $i \notin \{\ j,k,l\}$ silloin P-riippumattomuuden nojalla

   $$E_P(X_iX_jX_kX_l) = E_P(X_i)E_P(X_jX_kX_l) = 0\ .$$

(b) Arvioi Chebychevin epäyhtälöllä todennäköisyydet

$$P(|S_n| > \varepsilon n)$$

R Käytämme $E_P(S_n^4)$ momenttia Chebychevin epäyhtälossä:

$$\begin{aligned} P(|S_n| > \varepsilon n) &= P\big(|S_n|^4 > \varepsilon^4 n^4\big) \leq \frac{E_P\big(S_n^4\big)}{n^4 \varepsilon^4} \\ &\leq \frac{n E_P(X_1^4) + n(n-1) E_P(X_1^2)^2}{\varepsilon^4 n^4} \leq C n^{-2} \longrightarrow\to 0 \end{aligned}$$

kun $n \to \infty$, jossa $C > 0$ on vakio, ja $S_n/n \xrightarrow{P} 0$ stokastisen konvergenssin mielessä

(c) Osoita Borel Cantelli lemman avulla että P-melkein varmasti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0$$

Vihje Osoita

$$P\big(\{\ \omega : S_n(\omega) > n\varepsilon \text{ äärettömästi monille } n\text{:lle } \}\big) = 0$$

R. Koska

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| > \varepsilon n) \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < \infty$$

ensimmäisen Borel Cantellin lemmasta seuraa $\forall K \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &P\left(\limsup_n \left\{ \frac{|S_n|}{n} > \frac{1}{K} \right\}\right) = 0 \quad \forall K \in \mathbb{N}_+ \quad \Longleftrightarrow \\ &P\left(\liminf_n \left\{ \frac{|S_n|}{n} \leq \frac{1}{K} \right\}\right) = 1 \quad \forall K \in \mathbb{N}_+ \Longleftrightarrow \\ &P\left(\bigcap_{K\in\mathbb{N}_+} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} \left\{ \frac{|S_n|}{n} \leq \frac{1}{K} \right\}\right) = 1 \Longleftrightarrow \\ &P\left(\left\{\omega : \lim_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0\right\}\right) = 1 \end{aligned}$$

Huomautus Tästä lauseesta on olemassa vielä yleisempi versio, jossa $E_P(|X_1|) < \infty$ on riittävä ehto.