HY Todennäköisyysteoria, syksy 2013, laskuharjoitukset 6 (16.10.2013)

1. Osoita

   (a) Kun $\big(A_i : i \in \mathbb{N}\big) \subseteq \mathcal{F}$ on tapahtumien jono jolla $P(A_i \cap A_k) = 0$, $i \neq j$, $P(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = 1$, seuraa $P(B) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P(B|A_i)P(A_i)$

   Ratkaisu.

   Joukkojen A_i äärelliselle unionille on voimassa

$$
\begin{aligned}
P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = &\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j\leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k\leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots \\
&(-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n) \\
= &\sum_{i=1}^{n} P(A_i),
\end{aligned}
$$

   missä vimeinen seuraa oletuksesta $P(A_i \cap A_k) = 0$, $i \neq j$. Indikaattorein sama

$$
E(\mathbf{1}_{\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\}}(\omega)) = \sum_{i=1}^{n} E(\mathbf{1}_{\{A_i\}}(\omega)).
$$

$$
\begin{aligned}
P(B) &= E(\mathbf{1}_B) = E(\mathbf{1}_B \mathbf{1}_{\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\}}) \\
&= E(\lim_n (\mathbf{1}_B \mathbf{1}_{\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\}})) \\
&= \lim_n E(\mathbf{1}_B \mathbf{1}_{\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\}})) \\
&= \lim_n \sum_{i=1}^{n} E(\mathbf{1}_B \mathbf{1}_{A_i}) \\
&= \lim_n \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \lim_n \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i),
\end{aligned}
$$

   missä monotoninen konvergenssi sallii raja-arvon ja odotusarvon järjestyksen vaihtamisen. Tämä koska $\mathbf{1}_B \mathbf{1}_{\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\}}) \geq 0$ ja ei-vähenevä n:n suhten jokaisella ω.

   (b) Kun $P(B \cap C) > 0$, siitä seuraa $P(A|B \cap C) = \frac{P(A\cap B|C)}{P(B|C)}$

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} P(A|B\cap C) &= \frac{P(A\cap B\cap C)}{P(B\cap C)} = \frac{P(A\cap B|C)P(C)}{P(B\cap C)} \\ &= \frac{P(A\cap B|C)P(C)}{P(B|C)P(C)} = \frac{P(A\cap B|C)}{P(B|C)} \end{aligned}$$

(c)

$$P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\ldots P(A_n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1})$$

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n) &= P(A_n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1})P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1}) \\ &= P(A_n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-2})\cdot \\ &\quad P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-2}) \\ &= \ldots \\ &= P(A_n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-2})\cdot \\ &\ldots P(A_2|A_1)P(A_1) \end{aligned}$$

2. Todennäköisyysavaruudella $(\Omega=\mathbb{R},\mathcal{F}=\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ määritellään Poissonin todennäköisyysmittojen perhe $\{P_\lambda(d\omega):\lambda>0\}$ jossa

$$P_\lambda(A) = \exp(-\lambda)\sum_{n\in A\cap\mathbb{N}}\frac{\lambda^n}{n!}$$

jossa $\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$, $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(a) Osoita että $\forall\lambda>0$, $P_\lambda(d\omega)\ll P_1(d\omega)$ ja $P_1(d\omega)\ll P_\lambda(d\omega)$, eli kaikilla P_λ mitoilla on samat nolla joukkoja.

R. Kaikille $\lambda>0$ kun $A\in\mathbb{N}$, Poissonin todennäköisyysjakaumalle $P_\lambda(A)=0$ jos ja vain jos $A\cap\mathbb{N}=\emptyset$.

(b) Laske Radon-Nykodim derivaatta

$$\begin{aligned} Z_\lambda(n) &= \frac{dP_\lambda}{dP_1}(n) \quad n\in\mathbb{N}, \\ Z_\lambda(\omega) &= \text{ mielivaltainen, kun } \omega\notin\mathbb{N}, \end{aligned}$$

jolle päätee mitanvaihto-kaava

$$E_{P_1}(Z_\lambda\mathbf{1}_A) = P_\lambda(A) \quad \forall\lambda>0, A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$$

R.

$$
\begin{aligned}
P_\lambda(A) &= \sum_{n\in A} P_\lambda(\{n\}) = \sum_{n\in A} \exp(-\lambda)\frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \sum_{n\in A} \exp(-1) n! \frac{\exp(-\lambda)\frac{\lambda^n}{n!}}{\exp(-1)\frac{1}{n!}} = \sum_{n\in A} \exp(-1) n! \exp(-(\lambda-1))\lambda^n = E_{P_1}\big(Z_\lambda \mathbf{1}_A\big)\ , \\
&\text{jossa}\quad Z_\lambda(n) := \exp(1-\lambda)\lambda^n = \exp\big(n\log(\lambda)-(\lambda-1)\big),
\end{aligned}
$$

tai voidaan laskea ensiksi $Z_\lambda(n) = \frac{dP_\lambda}{dP_1}(n)$ ja sitten tarkistaa, että mitan vaihto toimii.

$$
P_\lambda(n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}
$$

$$
P_1(n) = e^{-1}\frac{\lambda^n}{n!}
$$

ja diskreetissä tapauksessa

$$
Z_\lambda(n) = \frac{dP_\lambda}{dP_1}(n) = \frac{P_\lambda(n)}{P_1(n)} = e^{1-\lambda}\lambda^n.
$$

Nyt

$$
\begin{aligned}
E_{P_1}(Z_\lambda \mathbf{1}_A) &= \int_A Z_\lambda(\omega) dP_1(\omega) \\
&= \sum_{n\in A\cap\mathbb{N}} Z_\lambda(n) e^{-1}\frac{1}{n!} \\
&= \sum_{n\in A\cap\mathbb{N}} e^{1-\lambda}\lambda^n e^{-1}\frac{1}{n!} \\
&= \sum_{n\in A\cap\mathbb{N}} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = P_\lambda(A).
\end{aligned}
$$

(c) Määritellään nyt satunnaismuuttuja $X(\omega) := \omega$. Laske ehdollinen todennäköisyys $P_\lambda(X=1|X\geq 1)$, $\lambda > 0$.

R. $P_\lambda(X=1|X\geq 1) = \dfrac{P_\lambda(\{X=1\}\cap\{X\geq 1\})}{P_\lambda(X\geq 1)} =$

$$
\frac{P_\lambda(\{X=1\})}{1-P_\lambda(X=0)} = \frac{\exp(-\lambda)\lambda}{1-\exp(-\lambda)} = \frac{\lambda}{\exp(\lambda)-1}
$$

(d) Käsitellään nyt todennäköisyysavaruus $\Omega = \mathbb{R}^2$ σ-albegralla $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes 2}$, tulomitalla $\mathbb{P}_\lambda = P_\lambda^{\otimes 2} = P_\lambda \otimes P_\lambda$.

Olkoon $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2$ ja satunnaismuuttujat $X_1(\omega) := \omega_1$ ja $X_2(\omega) = \omega_2$.

Osoita että $\mathbb{P}_\lambda$ todennäköisyyden suhteen satunnaismuuttajat X_1 ja X_2 ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita Poissonin jakaumalla P_λ.

Laske $\mathbb{P}_\lambda(X_1 = X_2)$.

Ratkaisu.

Mitalliselle suorakulmiolle $A \times B$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\lambda(X_1(\omega) \in A, X_2(\omega) \in B) &= \mathbb{P}_\lambda(\omega_1 \in A, \omega_2 \in B) = \mathbb{P}_\lambda(A \times B) \\
&= P_\lambda(A)P_\lambda(B) \\
&= P_\lambda(A)P_\lambda(\Omega_2)P_\lambda(\Omega_1)P_\lambda(B) \\
&= \mathbb{P}_\lambda(A \times \Omega_2)\mathbb{P}_\lambda(\Omega_1 \times B) \\
&= \mathbb{P}_\lambda(\omega_1 \in A, \omega_2 \in \Omega_2)\mathbb{P}_\lambda(\omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in B) \\
&= \mathbb{P}_\lambda(X_1(\omega) \in A)\mathbb{P}_\lambda(X_2(\omega) \in B)
\end{aligned}$$

Tulomittaa $\mathbb{P}_\lambda(A \times B)$ ei (kai) ole todettu σ-additiviiseksi. Jos se on σ-additiviinen, niin laajennuslauseen perusteella X_1 ja X_2 riippumattomuus laajenee kaikille $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ joukoille.

Jos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A} = \{C \in \Omega_a \times \Omega_2 : C = \bigcup_{k=1}^m A_k \times B_k\}$, jolle $A_n \downarrow \emptyset$, niin

$$A_{n,\omega_2} := \{\omega_1 \in \Omega_1 : (\omega_1, \omega_2) \in A_n\}.$$

ja $A_{n,\omega_2} \downarrow \emptyset$. Lisäksi $A_{n,\omega_2} \in \mathcal{F}_1$ jokaisella ω_2. Nyt

$$\mathbb{P}_\lambda(A_n) = E_{P_{\lambda_2}}(P_{\lambda_1}(A_{n,\omega_2})),$$

ja kun $A_{n,\omega_2} \downarrow \emptyset$, niin $P_{\lambda_1}(A_{n,\omega_2}) \downarrow 0$ (monotoninen jatkuvuus) ja $\mathbb{P}_\lambda(A_n) \downarrow 0$ (dominoitu konvergenssi). $\mathbb{P}_\lambda$ on σ-additiivinen.

$$\mathbb{P}_\lambda(X_1 = X_2) = \sum_{k=0}^{\infty} P_\lambda(k)P_\lambda(k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}$$

(e) Laske ehdollinen todennäköisyys $\mathbb{P}_\lambda(X_1 = n | X_1 = X_2) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Ratkaisu.

$$\mathbb{P}_\lambda(X_1 = n | X_1 = X_2) = \frac{\mathbb{P}_\lambda(X_1 = n, X_1 = X_2)}{\mathbb{P}_\lambda(X_1 = X_2)} = \frac{\mathbb{P}_\lambda(X_1 = n, X_2 = n)}{\mathbb{P}_\lambda(X_1 = X_2)}$$
$$= \frac{e^{-2\lambda} \frac{\lambda^{2n}}{(n!)^2}}{\mathbb{P}_\lambda(X_1 = X_2)}$$

3. Olkoon $Y(\omega) \geq 0$ λ-eksponentiaalinen satunnaismuuttuja, jolla

$$P(Y > t) = \exp(-\lambda t), \quad t \geq 0$$

(a) Laske λ-eksponentiaalisen jakauman tiheysfunktio.
Ratkaisu.
Kertymäfunktio on

$$F(t) = P(Y \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0,$$

josta tiheys

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}.$$

(b) Laske $E_\lambda(Y^n)$, $\quad n \in \mathbb{N}$, Vihje: Laske ensin $E_P(Y)$, käytä osittaisintegrointi, ja sitten induktio.
Ratkaisu.
Odotusarvo $E_\lambda(Y)$ on osittaisintegroimalla

$$E_\lambda(Y) = \int_0^\infty y f(y) dy = -\int_0^\infty y e^{-\lambda y}(-\lambda) dy$$
$$= -\Big/_0^\infty y e^{-\lambda y} + \int_0^\infty e^{-\lambda y} dy = \int_0^\infty e^{-\lambda y} dy$$
$$= -\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda y}(-\lambda) dy = -\frac{1}{\lambda}\Big/_0^\infty e^{-\lambda y} = \frac{1}{\lambda},$$

ja induktioaskel

$$E_\lambda(Y^{n+1}) = \int_0^\infty y^{n+1} f(y) dy = -\int_0^\infty y^{n+1} e^{-\lambda y}(-\lambda) dy$$
$$= -\Big/_0^\infty y^{n+1} e^{-\lambda y} + (n+1)\int_0^\infty y^n e^{-\lambda y} dy$$
$$= (n+1)\int_0^\infty y^n e^{-\lambda y} dy = \frac{(n+1)}{\lambda}\int_0^\infty y^n \lambda e^{-\lambda y} dy$$
$$= \frac{(n+1)}{\lambda} E_\lambda(Y^n),$$

mistä

$$E_\lambda(Y^n) = \frac{n!}{\lambda^n} E_\lambda(Y).$$

(c) Laske $E_\lambda\big(\exp(tY)\big), \quad t \in \mathbb{R}$.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}
E_\lambda\big(\exp(tY)\big) &= \int_0^\infty e^{ty}\lambda e^{-\lambda y} dy = \\
&= -\frac{\lambda}{\lambda - t}\int_0^\infty e^{-(\lambda-t)y}(-(\lambda - t))dy \\
&= -\frac{\lambda}{\lambda - t}\Big/_0^\infty e^{-(\lambda-t)y} = \frac{\lambda}{\lambda - t},
\end{aligned}$$

missä integraali on $< \infty$, kun $\lambda > t$.

(d) Tarkistaa että kun $s, t > 0$, ehdolliselle todennäköisyydelle pätee

$$P_\lambda(Y > t + s | Y > s) = P_\lambda(Y > t).$$

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}
P_\lambda(Y > t + s | Y > s) &= \frac{P_\lambda(\{Y > t + s\} \cap \{Y > s\})}{P_\lambda(Y > s)} = \frac{P_\lambda(Y > t + s)}{P_\lambda(Y > s)} \\
&= \frac{e^{-(t+s)}}{e^{-s}} = e^{-t} = P_\lambda(Y > t).
\end{aligned}$$

4. Gaussisesta jakaumasta.

(a) Osoita

$$2\pi = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) dxdy = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx\right)^2$$

Vihje: Muuttujan vaihdolla $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta),\ r \geq 0$ $\theta \in [0, 2\pi)$.

Ratkaisu.

Käytetään vihjeen muuttujanvaihtoa ja merkitään Jakobiaania

$$J_{x,y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix},$$

jonka determinantti on

$$|J_{x,y}| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r.$$

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx\right)^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)dxdy \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)|J_{x,y}|dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)rdr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi
\end{aligned}$$

Jos yo tulkitaan Riemann integraaliksi, niin integrointijärjestys täytyy vaihtaa suljetussa pallossa/neliössä ja sitten viedä rajalle. Integrandi on positivinen ja Fubini sanoo, että järjestyksen voi kääntää.

(b) On olemassa satunnaismuuttuja $G(\omega)$ jolla

$$P(G \leq x) = \Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy \tag{0.1}$$

G:n jakauma kutsutaan standardiseksi Gaussiseksi jakaumaksi.
Vihje Valitse todennäköisyysavaruudeksi $(\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
Ratkaisu.
Reaaliarvoinen satunnaismuuttuja X on mitallinen kuvaus todennäköisyyskentältä $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mitalliseen avaruuteen $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, johon X indusoi TN-mitan (X:n jakauman)

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A)) = P(\omega : X(\omega) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

Haetaan abstraktia kenttää $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ja satunnaismuuttujaa G, kun tiedetään $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$, missä μ on TN-mitta.

Koska integrandi $\Phi(x)$:ssä on aina > 0, $\Phi(x)$ on kasvava x:n suhteen. $\Phi(-\infty) = 0$ ja edellisen kohdan mukaan $\Phi(+\infty) = 1$, niin $\Phi(x)$ on kertymäfunktio ja määrittelee luentomonisteen s.35 kappaleen "TN reaaliakselilla" yksikäsitteisen TN-mitan μ, jolle

$$\mu(-\infty, x] = \Phi(x).$$

Samaistamalla $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $P = \mu$ ja asettamalla $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) \equiv x$ (G^{-1} myös identiteetti), on

$$P(G \leq x) = P(G(\omega) \in (-\infty, x]) = P(G^{-1}(-\infty, x]) = P_G(-\infty, x],$$

ja

$$P(G \leq x) = P(G^{-1}(-\infty, x]) = P(-\infty, x] = \mu(-\infty, x] = \Phi(x),$$

mistä nähdään, että satunnaismuuttujan G jakaumalle on

$$P_G(-\infty, x] = \mu(-\infty, x] = \Phi(x).$$

Toinen tapa: asetetaan $\Omega = (0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}((0, 1])$, $P = m|_{(0,1]}$ on Lebesgue mitan m rajoittuma välille $(0, 1]$. Määritellään satunnaismuuttuja (se että tämä on sm, luentomonisteen seuraus 3.0.3)

$$G(\omega) = \inf\{x : \omega \leq \Phi(x)\}.$$

Tämän kf:lle F_G

$$F_G(x) = P(G \leq x) = P((0, \Phi(x))) = \Phi(x).$$

Tämä toimii mille tahansa annetulle kf:lle $F(x)$. Tässä myös rakenne on (ehkä) siistimpi. G on kuvaus TN avaruudelta $((0, 1], \mathcal{B}((0, 1]), m|_{(0,1]})$ TN avaruudelle $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$, jotka ovat selvästi eriä.

(c) Mikä on $G(\omega)$:n jakauman tiheysfunktio ?
Ratkaisu.
Jos $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, niin $F'(x) = f(x)$.

5. Olkoon $m \in R$ ja $\sigma > 0$, ja $X(\omega) = m + \sigma G(\omega)$.

(a) Laske X:n jakauman kertymäfunktio $P(X \leq x)$.
Ratkaisu.

$$\begin{aligned} P_X(X \in (-\infty, x]) &= P(X(\omega) \leq x) = P(m + \sigma G(\omega) \leq x) \\ &= P(G \leq \frac{x - m}{\sigma}) = \Phi(\frac{x - m}{\sigma}) \end{aligned}$$

(b) Laske X:n jakauman tiheysfunktio.

Ratkaisu.

$$F_X = \Phi(\frac{x-m}{\sigma})$$

Rightarrow

$$f_X = \frac{d}{dx}\Phi(\frac{x-m}{\sigma}) = f_G(\frac{x-m}{\sigma})/\sigma$$

(c) Todennäköisyysavaruudessa $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, laske Radon-Nikodymin derivaatta (uskottavuusosamäärä)

$$\frac{dP_X}{dP_G}(x)$$

jossa $P_X(B) = P(X \in B)$ ja $P_G(B) = P(G \in B)$.

Vihje Uskottavuusosamäärä toteuttaa mitanvaihdon kaavaa

$$\int_{\mathbb{R}} h(x) P_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} h(x) \frac{dP_X}{dP_G}(x) P_G(dx)$$

kaikille Borel-mitallisille funktioille $h(x) \geq 0$.

Ratkaisu.

Luentomonisteessa on RN lause TN-mitoille, mutta se toimii myös σ-äärellisille mitoille.

Mitta $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ on σ-äärellinen, jos on olemassa ositus $(\Omega_n)_{n\geq 1}$, $\mu(\Omega_n) < \infty$ ja

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n.$$

Esimerkkinä Lebeque mitta m $\mathbb{R}$:llä: Luentojen esimerkin 1.1.3 kontruktio Lebesgue mitalle, missä tasainen jakauma P_k väleillä $\Omega_k = [k, k+1]$, $k \in \mathbb{Z}$ antaa välille (a, b) pituuden $b - a$

$$m(a, b) = \sum_k P_k((a, b) \cap [k, k+1])$$

ja $m(\Omega_k) = 1$, $\Omega = \mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$.

Nyt RN lause (esimerkiksi Elfving-Tuominen s. 168) sanoo, että jos $\sigma \ll \mu$ ovat σ-äärellisiä, niin on olemassa mitallinen f s.e.

$$\sigma(A) = \int_A f d\mu, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Jos μ on TN-mitta reaaliakselilla ja $\mu \ll m$, niin RN-lause toimii ja on olemassa mitallinen f (Radon-Nikodym derivaatta) s.e.

$$\mu(A) = \int_A d\mu = \int_A \frac{d\mu}{dm} dm := \int_A f dm.$$

Kuvaus $f(\omega) = \frac{d\mu}{dm}$ on mitan TN-mitan μ tiheys Lebesque mitan suhteen ja jos se on Riemann integroituva, niin se on sama (m-mv?) tiheys mikä saadaan kertymäfunktiota derivoimalla.
Nyt $m \ll P_X \ll P_G \ll m$ ja

$$\begin{aligned}
P_X(A) = E_{P_X}(\mathbf{1}_A) = \int_A dP_X \\
&\overset{RN}{=} \int_A \frac{dP_X}{dm} dm = \int_A f_X dm \\
&\overset{RN}{=} \int_A f_X \frac{dm}{dP_G} dP_G \\
&= \int_A f_X / \frac{dP_G}{dm} dP_G = \\
&= \int_A f_X / f_G dP_G = \\
&= \int_A \frac{dP_X}{dP_G} dP_G \\
&= E_{P_G}(\frac{dP_X}{dP_G} \mathbf{1}_A)
\end{aligned}$$

ja

$$\frac{dP_X}{dP_G} = \frac{f_X}{f_G} = \frac{1}{\sigma} \frac{f_G(\frac{x-m}{\sigma})}{f_G(x)}.$$

6. (a) Laske odotusarvo

$$E_P(\exp(\lambda G)) = \int_\Omega \exp(\lambda G(\omega)) P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} \exp(\lambda x) P_G(dx)$$

Ratkaisu.

$$E_{P_G}(\exp(\lambda G)) = \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} f_G(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x - \frac{1}{2} x^2} dx$$

Eksponentille

$$\lambda x - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}(x^2 - 2\lambda x) = -\frac{1}{2}((x-\lambda)^2 - \lambda^2),$$

ja

$$\begin{aligned} E_P(\exp(\lambda G)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{1}{2}\lambda^2} e^{-\frac{1}{2}(x-\lambda)^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\lambda^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-\lambda)^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\lambda^2} \sqrt{2\pi} = e^{\frac{1}{2}\lambda^2} \end{aligned}$$

(b) Laske myös odotusarvo $E_P(\exp(\lambda X))$ jossa $X(\omega) = m + \sigma G(\omega)$.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} E_P(e^{\lambda(m+\sigma G)}) &= e^{\lambda m} E_P(e^{\lambda \sigma G}) \\ &= e^{\lambda m + \frac{1}{2}\lambda^2 \sigma^2} \end{aligned}$$