HY Todennäköisyysteoria, syksy 2013, laskuharjoitukset 5 (9.10.2013)

1. - Todista Checbychevin epäyhtälö: jos $X(\omega) \geq 0$ P-melkein varmasti,

$$P(X > t) \leq \frac{E_P\big(X\big)}{t}$$

Vihje

$$0 \leq t\, \mathbf{1}(X(\omega) > t) \leq X(\omega)$$

- Osoita myös Chentsovin epäyhtälö

$$P(X > t) \leq \inf\Big\{ \exp(-\lambda t) E_P\big(\exp(\lambda X)\big) :\ \lambda > 0 \Big\}$$

Olkoon satunnaismuuttuja $X(\omega)$ Poisson(θ) jakautunut, jossa $\theta > 0$ on parametri, eli

$$P_\theta\big(X = n\big) = \exp(-\theta)\frac{\theta^n}{n!} \quad n \in \mathbb{N}$$

- Laske $E_\theta(\exp(\lambda X))$, $\forall \lambda > 0$.
- Arvioi yläpuolelta $P_\theta\big(X > t\big)$ Chentsovin epäyhtälöllä.

Ratkaisu.

- Oletetaan, että funktio $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ on kasvava ja $g(x) \neq 0$, kun $x \neq 0$.
Jos $t > 0$, niin joukossa $\{\omega : X \geq t\}$ on $g(X) \geq g(t)\mathbf{1}_{\{X \geq t\}}(\omega)$. $\Rightarrow$

$$E(g(X)) \geq E(g(t)\mathbf{1}_{\{x \geq t\}}(\omega)) = g(t)P\{X \geq t\}.$$

Koska $g(t) > 0$, tästä seuraa

$$P\{x \geq t\} \leq \frac{E(g(X)}{g(t)}.$$

Valitsemalla $g(x) = x$, saadaan tehtävän väite.

- $g(x) = e^{\lambda x}$ on kasvava ja positiivinen. Edellisestä kohdasta saadaan
$$P\{X \geq t\} \leq \frac{E(e^{\lambda X})}{e^{\lambda t}},$$
joka on voimassa kaikilla $\lambda > 0$, josta väite. (Odotusarvon on mukava olla olemassa.)

- Poisson(θ) jakautuneelle satunnaismuuttujalle X on momenttigeneroiva funktio
$$\begin{aligned} M_X(\lambda) := E(e^{\lambda X}) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{\lambda k} e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!} \\ &= e^{-\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{\lambda}\theta)^k}{k!} = e^{\theta(e^{\lambda}-1)} \end{aligned}$$

- Chebyshev $\Rightarrow$
$$P_\theta\{X \geq t\} \leq \frac{M_X(\lambda)}{e^{\lambda t}} = e^{\theta(e^{\lambda}-1)-\lambda t}.$$
exponentilla $f(\lambda) := \theta(e^{\lambda}-1) - \lambda t$ on minimikohta, joka löytyy suoraan derivoimalla
$$f'(\lambda) = \theta e^{\lambda t} - t = 0,$$
josta $\hat{\lambda} = \log(\frac{t}{\theta})$ (oletettava, että $t > \theta$). $e^{f(\lambda)}$ toisen derivaatan
$$f''(\lambda)e^{f(\lambda)} + (f'(\lambda))^2 e^{f(\lambda)}$$
positiivisuuteen riittää, että $f''(\hat{\lambda}) = \theta e^{\hat{\lambda}} > 0$, mikä on ja ollaan minimikohdassa ja
$$P_\theta\{X \geq t\} \leq e^{\theta(e^{\hat{\lambda}}-1)-\hat{\lambda} t} = e^{(t-\theta)} \left(\frac{\theta}{t}\right)^t.$$
Jos $t < \theta$ f voidaan kirjoittaa esimerkiksi
$$\begin{aligned} f(\lambda) &= (\theta + t - t)(e^{\lambda}-1) - \lambda t \\ &= (\theta - t)(e^{\lambda}-1) + t(e^{\lambda} - 1 - \lambda) \\ &= (\theta - t)(e^{\lambda}-1) + t(\frac{1}{2!}\lambda^2 + \frac{1}{3!}\lambda^3 + \ldots), \end{aligned}$$
joka on kahden positiivisen kasvavan ($\lambda > 0$) funktion summana positivinen, kasvava $\Rightarrow$ $e^{f(\lambda)}$ surin alaraja saadaan antamalla $\lambda \to 0$.

2. Olkoon $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, siis $E_P(|X|) < \infty$. Osoita että

$$E_P\big(|X|\mathbf{1}(|X| > n)\big) \downarrow 0 \text{ kun } n \uparrow \infty \; .$$

Vihje

$$0 \leq |X(\omega)|\mathbf{1}(|X(\omega) \leq b|) \uparrow |X(\omega)|$$

kun $n \uparrow \infty$. Muista monotoninen konvergenssin lause.

Ratkaisu
Koska $|X(\omega)|\mathbf{1}(|X(\omega)| \leq n) \uparrow |X(\omega)|$ $\forall\omega$ kun $n \uparrow \infty$ monotonisen konvergenssin lauseesta seuraa

$$E_P(|X(\omega)|\mathbf{1}(|X(\omega)| > n)) = E_P(|X(\omega)|) - E_P(|X(\omega)|\mathbf{1}(|X(\omega)| \leq n)) \downarrow 0 \text{ kun } n \uparrow \infty$$

3. Olkoon $X(\omega) \in \mathcal{Y}F$, (yksinkertäinen satunnaismuuttuja) osoita että $E_P(X)$ ei riipu satunnaismuuuttujan esityksestä.

Vihjeet Satunnaismuuttujalla on esitykset:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \, \mathbf{1}_{B_i}(\omega) = \sum_{t \in \mathbb{R}} t \, \mathbf{1}_{I_t}(\omega), \\ I_t &= \{\omega : X(\omega) = t\}, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

jossa tapahtumat B_i eivät ole vältämättä erillisiä ja arvot x_i eivät ole vältämättä eriläisiä. Huomataan että oikean puoleen summa on yli äärellisen indeksijoukon koska $X(\omega)$ saa äärellistä monta arvoa. Osoitamme että

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \, P(B_i) = \sum_{t \in \mathbb{R}} t \, P(\{\omega : X(\omega) = t\})$$

ja siksi $E_P(X)$ on hyvin määritelty.

Ratkaisu

X:llä kaksi esitystä

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{i=1}^{m} x_i \, \mathbf{1}_{A_i}(\omega) \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i \, \mathbf{1}_{B_i}(\omega). \end{aligned}$$

Esityksen joukoista $\{A_1, \ldots, A_m\}$ voidaaan olettaa, että ne muodostavat Ω:n osituksen

- Esimerkiksi jos $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, niin

$$x_1 \mathbf{1}_{A_1} + x_2 \mathbf{1}_{A_2} = x_1 \mathbf{1}_{A_1 \setminus A_2} + (x_1 + x_2) \mathbf{1}_{A_1 \cap A_2} + x_2 \mathbf{1}_{A_2 \setminus A_1},$$

  toisin sanoen joukkojen A_i voidaan olettaa olevan erillisiä.

- Aina voidan lisätä esitykseen $0 \cdot \mathbf{1}_{A_{m+1}}$, missä $A_{m+1} = \Omega \setminus (\cup_i^m A_i)$ jolloin $\cup_{i=1}^{m+1} A_i = \Omega$.

Oletuksella, että esitykset muodostavat osituksen, on

$$B_i = \bigcup_{j=1}^{m} (B_i \cap A_j)$$
$$A_i = \bigcup_{j=1}^{n} (A_i \cap B_j)$$

ja P:n additiivisyyden nojalla

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} x_i \; P(A_i) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \; P(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_j \; P(A_i \cap B_j) \end{aligned}$$

koska joukossa $A_i \cap B_j$ on

$$x_i = X(\omega) = y_j.$$

Vaihtamalla summausjärjestystä, on

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_j \; P(A_i \cap B_j) &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} y_j \; P(B_j \cap A_i) \\ &= \sum_{j=1}^{n} y_j P(B_j) \end{aligned}$$

4. Olkoon $\Omega = [0, 1]$ todennäköisyysavaruus, varustettuna Borelin σ-algebralla Lebesguen todennäköisyysmitalla $P(d\omega) = d\omega$.

   - Osoita että satunnaismuuttujen jonolle

$$X_n(\omega) = n \; \mathbf{1}_{[0, n^{-1}]}(\omega), \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} E_P(X_n) \neq E_P\left(\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)\right)$$

- Olkoon

$$Y(\omega) := \sup_{n\in\mathbb{N}} X_n(\omega), \quad \omega \in (0,1]$$

Osoita että $E_P(Y) = \infty$, ja siksi Lebesguen dominoidun konvegenssin lause ei ppysty soveltamaan

- Voidaanko soveltaa Fatoun lemmaa ?

Ratkaisu

- Koska jokaisella $\omega > 0$ on olemassa $n \in \mathbb{N}$ s.e. $k^{-1} < \omega$, kun $k \geq n$ on $\lim_n \sup_{k\geq n} X_n(\omega) = \lim_n \inf_{k\geq n} X_n(\omega) = 0$ melkein kaikkialla.
- Edellisestä,

$$E(\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)) = 0.$$

Kuitenkin $E(X_n(\omega)) = 1$ jokaisella n.

- Pitää majoroida $X_n(\omega)$ melkein jokaisella ω ja jokaisella n. Origoa kohden kasvava porrasfunktio

$$Y = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbf{1}_{(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]},$$

on pienin majorantti ja sen integraali on

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} k(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty.$$

(Tässä on vaihdettu numeroituvan summan ja odotusarvon järjestystä. Se, että tämä on sallittua seuraa monotonisesta konvergenssista positiivitermiselle sarjalle (Beppo Levi)).

- Fatoun lemman $\liminf$ puoli pätee. $X(\omega) \geq 0$ melkein varmasti ja

$$0 = E(\liminf X_n) \leq \liminf E(X_n) = 1.$$

Samoin kuin dominoidussa konvergenssissa, integroituvaa majoranttia ei ole ja $\limsup$ puoli ei päde.

$$1 = \limsup E(X_n) \nleq E(\limsup X_n) = 0.$$

5. Tehtävä numeroituvuudesta:

- Osoita: tauluun=$[0,1]^2$ mahtuu ylinumeroituva määrä erillisiä nollamerkin='O' eli ympyrän muotoisia käyriä, (siis ympyrä-käyrät saavat olla myös sisäkkäisiä kun eivät koske toisiaansa).
- Osoita että taulussa $= [0,1]^2$ tai vaikka $= \mathbb{R}^2$ avaruudessa mahtuu korkeintaan numeroituva määrää erillisiä '8' eli '∞'-merkkin muotoisia käyriä (siis '8'- muotoisia käyrät saavat olla myös sisäkkäisiä kun eivät koske toisiaansa).

Ratkaisu

Koska $\mathbb{R}^2$ on numeroituva yhdiste 1:n levyisistä neliöistä, rittää tarkastella neliötä $[0,1]^2$.

- Kuvaus $r \in (0, \frac{1}{2}) \mapsto C_r$, missä C_r on $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ keskinen r-säteinen ympyrä on bijektio ylinumeroituvalta joukolta.
- Samaistetaan kahdeksikko K rationaaliparin (p,q) kanssa

  $$K \mapsto (p,q),$$

  missä p kuuluu kahdeksikon toiseen silmukkaan ja q toiseeen. Koska $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tiheässä $\mathbb{R}^2$:ssa tällaisia pisteitä aina on olemassa. Piste ei ole yksikäsitteinen, mutta koska kahdeksikot eivät saa leikata toisiaan, on kuvaus $K \mapsto (p,q)$ injektio. Jos leikkaus olisi sallittu, voitaisiin valita yhteinen rationaalipiste pari, joka kuuluu kumpaankin kahdeksikkoon. (Tämä sallii sisäkkäiset, leikkaamattomat kahdeksikot) $\mathbb{Q}^2$ on numeroituva $\Rightarrow$ toisiaan leikkaamattomien kahdeksikkojen joukon mahtavuus on korkeintaan numeroituva.