HY Todennäköisyysteoria, syksy 2013, laskuharjoitukset 4 (2.10.2013)

1. Olkoon $\mathcal{Q}$ todennäköisyysmittojen joukko todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F})$.

   Osoita:

   $$c(A) := \sup_{Q \in \mathcal{Q}} Q(A), \quad A \in \mathcal{F}$$

   on ulkomitta eli toteuttaa

   - $c(\emptyset) = 0$,
   - $c(A) \leq c(B)$ kun $A \subseteq B$
   - c on ali-σ-additiivinen.

   Ratkaisu

   - Jokaisella $Q \in \mathcal{Q}$, $Q(\emptyset) = 0$.
   - Jokaisella $Q \in \mathcal{Q}$ on $Q(A) \leq Q(B)$, kun $A \subseteq B$. $\Rightarrow \sup_Q\{Q(A)\} \leq \sup_Q\{Q(B)\}$.
   - Jos $A_k \in \mathcal{F}$, $k = 1, \ldots$, niin jokaisella $Q \in \mathcal{Q}$ on $Q(\cup_k A_k) \leq \sum_k Q(A_k) \leq \sum_k c(A_k)$. $\Rightarrow \sup_Q Q(\cup_k A_k) \leq \sum_k c(A_k)$

2. Olkoon $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ei-vähenevä funktio, $F(t) \geq F(s)$ kun $t \geq s$. Osoita että F on Borel mitallinen, eli Borelin joukon käänteiskuva on Borelin joukko.

   Vihje: määritellään yleistetty käänteisfunktio

   $$\overleftarrow{F}(t) = \sup\{x : F(x) \leq t\}$$

   Ei-vähenevän funktion F käänteisfunktio ei ole yksikäsitteinen silloin kun $F(x)$ vakio jossakin välissä.

   Osoita että kun $q \in \mathbb{Q}$

   $$\{t : F(t) \leq q\} = \big(-\infty, \overleftarrow{F}(q)\big]$$

   vai

   $$\{t : F(t) \leq q\} = \big(-\infty, \overleftarrow{F}(q)\big)$$

ja näytä että tämä riittää Borelin-mitallisuuteen.

Ratkaisu.

Osoitettava, että joukon $(-\infty, q]$ alkukuva $\{x : F(x) \leq q\}$ on joko muotoa $\big(-\infty, \overleftarrow{F}(q)\big]$ tai $\big(-\infty, \overleftarrow{F}(q)\big)$ (tällöin F on Borel-mitallinen).

Koska F on ei-vähenevä, niin sillä on jokaisessa pisteessä oikean- ja vasemmanpuoleiset raja-arvot $F(x+)$ ja $F(x-)$. Nyt q voi "osua" F:n kuvaajaan, joko jatkuvuuspisteessä tai epäjatkuvuuspisteessä. Jos piste $x_0 := \overleftarrow{F}(q)$ on jatkuvuuspiste, on se myös vasemmalta jva (ks alla).

Jos x_0 on epäjatkuvuuspiste, on $F(x_0-) < F(x_0+)$ ja $q \in [F(x_0-), F(x_0+)]$ (Kuva olisi hyvä olla) ja alkukuvan muoto rippuu siitä, onko F oikealta tai vasemmalta jatkuva pisteessä x_0.

- Vasemmalta jatkuva.

$$x \in \{x : F(x) \leq q\} \;\Leftrightarrow F(x) \leq F(x_0-) = F(x_0) = F(\overleftarrow{F}(q)).$$

  F:n monotonisuudesta $\Rightarrow$ $x \leq \overleftarrow{F}(q)$ ja alkukuva on joukko

$$\big(-\infty, \overleftarrow{F}(q)\big]$$

- Oikealta jatkuva.

$$x \in \{x : F(x) \leq q\} \;\Leftrightarrow F(x) \leq F(x_0-) < F(x_0+) = F(x_0) = F(\overleftarrow{F}(q)).$$

  Alkukuva on

$$\big(-\infty, \overleftarrow{F}(q)\big)$$

3. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F})$ todennäköisyysavaruus ja $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$ äärellisesti additiivinen todennäköisyys. Osoita että P on σ-additiivinen jos ja vain jos

$$\big(A_n : n \in \mathbb{N}\big) \subseteq \mathcal{F} \text{ ja } A_n \downarrow \emptyset \implies \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0\,.$$

Ratkaisu.

Käsitelty edellisissä harjoituksissa.

4. Osoita että Riemann-Stieltjesin integraali on olemassa kun funktio $H(y)$ on ei-vähenevä. Vihje: Osoita ensin että epäjatkuvuus pisteiden joukko

$$D := \left\{ y : H(y-) := \lim_{x \uparrow y} H(x) < H(y+) = \lim_{x \downarrow y} H(x) \right\}$$

on korkeintaan mumeroituva. Käytä sitten hajotelma

$$H(x) = \left(H^c(x) - \sum_{y \le x} \Delta H(y) \right) \quad \text{jossa} \quad \Delta H(y) := H(y+) - H(y-)$$

jossa näytät että $H_c(x)$ on ei-vähenevä ja jatkuva. Tämä yleistyy suoraan tapaukseen jossa $H(y) = (H^{\oplus}(y) - H^{\ominus}(y))$, $G(y) = (G^{\oplus}(y) - G^{\ominus}(y))$, jossa $H^{\oplus}, H^{\ominus}, G^{\oplus}, G^{\ominus}$, ovat ei-väheneviä.

Ratkaisu.

Huomaamme ensin, koska $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ on ei vähenevä, epäjatkuvuuspistejoukko

$$\left\{ t : \Delta F(t) = \left(F(t+) - F(t-) \right) > 0 \right\} = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ t \in (z, z+1] : \Delta F(t) > n^{-1} \right\}$$

on korkeintaan numeroituva koska $\forall z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

$$\#\left\{ t \in (z, z+1] : \Delta F(t) > n^{-1} \right\} \le (F(z+1) - F(z))\, n < \infty$$

5. Osoite että jos $H(x)$ on (palottain) jatkuva ja $G(x)$ on derivoituva jatkuvalla derivaatalla $G'(x)$, Riemannin Stieltjes integraaleille pätee

$$\int_a^b H(x) G(dx) = \int_a^b H(x) G'(x) dx$$

Ratkaisu.

Riittää osoittaa, että Riemann-Stieltjes integraali palautuu tavalliseen Riemann integraaliin kun G jatkuvasti derivoituva jollain välillä. Paloittaisesti jatkuvalle H integroidaan palat ja summataan.

Olkoon Π välin $[a, b]$ jako

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

ja $|\Pi| := \sup_k |x_k - x_{k-1}|$. Merkitään

$$\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$$
$$\Delta G_k := G(x_k) - G(x_{k-1}).$$

Väliarvolauseen nojalla on olemassa $u_k \in (x_{k-1}, x_k)$ s.e.

$$\Delta G_k = G'(u_k)\Delta x_k.$$

Integraalia $\int_a^b H(x)G(dx)$ vastaava Riemann summa on

$$\begin{aligned} I_\Pi^1 &= \sum_{k=1}^n H(t_k)\Delta G_k, \quad t_k \in [x_{k-1}, x_k] \\ &= \sum_{k=1}^n H(t_k)G'(u_k)\Delta x_k \end{aligned}$$

ja integraalia $\int_a^b H(x)G'(x)dx$ vastaava on

$$I_\Pi^2 = \sum_{k=1}^n H(t_k)G'(t_k)\Delta x_k$$

(voidaan käyttää samaa jakoa ja välipistettä) ja

$$\begin{aligned} |I_\Pi^1 - I_\Pi^2| &= |\sum_{k=1}^n H(t_k)(G'(u_k) - G'(t_k))\Delta x_k| \\ &\le \sum_{k=1}^n |H(t_k)||G'(u_k) - G'(t_k)|\Delta x_k. \end{aligned}$$

H jatkuva suljetulla välillä $\Rightarrow$ on olemassa M s.e. $|H(x)| \le M$, kun $x \in [a,b]$. G' jatkuva suljetulla välillä $\Rightarrow$ G' tasaisesti jatkuva välissä $[a,b]$.

Näistä seuraa, että jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ s.e.

$$|I_\Pi^1 - I_\Pi^2| \le \sum_{k=1}^n M\epsilon\Delta x_k = M\epsilon(b-a), \tag{0.1}$$

kun $|\Pi| < \delta$.

Koska H on jatkuva, se on R-S integroituva ja jokaista $\epsilon > 0$ kohti on olemassa $\delta > 0$ ja jako Π_2, jolle $|\Pi_2| < \delta$ s.e.

$$|\int_a^b H(x)G(dx) - I_{\Pi_2}^1| < \epsilon.$$

Jos Π_1 on jako, joka toteuttaa (0.1):n, ja Π on jako, jolle $|\Pi| < |\Pi_1 \cup \Pi_2|$

$$
\begin{aligned}
|\int_a^b H(x)G(dx) - I_\Pi^2| &= |\int_a^b H(x)G(dx) - I_\Pi^2 + I_\Pi^1 - I_\Pi^1| \\
&\le |\int_a^b H(x)G(dx) - I_\Pi^1| + |I_\Pi^1 - I_\Pi^2| \\
&\le \epsilon + M(b-a)\epsilon.
\end{aligned}
$$

6. Olkoon $X(\omega), X_n(\omega), n \in \mathbb{N}$ satunnasimuuttujat jolla $X_n(\omega) \to X(\omega)$ P-melkein varmasti.

   Osoita että P-melkein varmasti myös Cesaron keskiarvot suppenevat

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) = X(\omega) \qquad P\text{-melkein varmasti}$$

   Vihje: osoita Cesaron' keskiarvo lause deterministisille jonoille. R. Olkoon A jolla $P(A) = 1$ ja $X_n(\omega) \to X(\omega)$ kun $\omega \in A$.

   Jokaiselle $\omega \in A$ väite seuraa Cesaron keskiarvojen suppenimisesta deterministille jonoille. Tärkemmin $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\omega, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ jos $|X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon$ kun $n > N(\omega, \varepsilon)$. Olkoon $n > N(\omega, \varepsilon) = N$,

   $$
   \begin{aligned}
   &\left| X(\omega) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) \right| = \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (X_k(\omega) - X(\omega)) \right| \\
   &\le \frac{1}{n}\left| \sum_{k=1}^{N} (X_k(\omega) - X(\omega)) \right| + \frac{(n-N)}{n} \left\{ \frac{1}{(n-N)} \sum_{k=N+1}^{n} |X_k(\omega) - X(\omega)| \right\} \\
   &\le \frac{1}{n}\left| \sum_{k=1}^{N} (X_k(\omega) - X(\omega)) \right| + \varepsilon = \frac{C(\omega)}{n} + \varepsilon \le 2\varepsilon
   \end{aligned}
   $$

   kun n on tarpeeksi suuri (ω:sta riippuen)

7. Olkoon kuvaus $g : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ jossa $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ ovat mielivaltaisia joukkoja. Osoita:

   $$\sup_{x\in\mathbb{X}} \inf_{y\in\mathbb{Y}} g(x,y) \;\le\; \inf_{y\in\mathbb{Y}} \sup_{x\in\mathbb{X}} g(x,y) \;,$$

   Päinvastainen epäyhtälö ei päde ilman lisäoletuksia.

   Ratkaisu.

Kiinnitetään piste (x_0, y_0) hetkeksi. Se on kuitenkin mielivaltainen. Tällöin

$$\inf_{y \in \mathbb{Y}} g(x_0, y) \leq g(x_0, y_0)$$
$$g(x_0, y_0) \leq \sup_{x \in \mathbb{X}} g(x, y_0).$$

$\Rightarrow$

$$\inf_{y \in \mathbb{Y}} g(x_0, y) \leq \sup_{x \in \mathbb{X}} g(x, y_0), \quad \forall x_0, y_0.$$

Koska x_0 on mielivaltainen, on

$$\sup_{x \in \mathbb{X}} \inf_{y \in \mathbb{Y}} g(x, y) \leq \sup_{x \in \mathbb{X}} g(x, y_0).$$

Myös y_0 on mielivaltainen ja

$$\sup_{x \in \mathbb{X}} \inf_{y \in \mathbb{Y}} g(x, y) \leq \inf_{y \in \mathbb{Y}} \sup_{x \in \mathbb{X}} g(x, y).$$