HY Todennäköisyysteoria, syksy 2013, laskuharjoitukset 3 (25.9.2013)

1. Osoita: $\mathbb{R}^d$:n Borelin σ-algebralle pätee

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d} = \underbrace{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})}_{d-\text{kertaa}}$$

Vihje Jos $U \subseteq \mathbb{R}^d$ on avoin, $\forall x = (x_1, \ldots, x_d) \in U \; \exists r = (r_1, \ldots, r_d), q = (q_1, \ldots, q_d) \in \mathbb{Q}^d$ jolla $r_i < x_i < q_d$ ja

$$(r, q) = (r_1, q_1) \times \cdots \times (r_d, q_d) \subseteq U$$

Ratkaisu.

Määritelmät:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) := \sigma\{\mathbb{R}^d : n \text{ avoimet joukot}\}$$
$$\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d} := \sigma\{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_d : A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)\}$$

Riittää osoittaa inkluusio kumpaankin suuntaan virittäjäjoukoille.

- Edellisten harjoitusten tehtävän 3 perusteella jokainen avoin $U \subset \mathbb{R}^d$ voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä mitallisia laatikoita. $\Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d}$:n
- Avoimet laatikot $(p, q) := (p_1, q_1) \times \ldots \times (p_d, q_d)$ (tai puoliavoimet, suljetut, tai muotoa $(-\infty, q] := (-\infty, q_1] \times \ldots \times (-\infty, q_d]$ olevat, jne), $p, q \in \mathbb{R}^d$ virittävät $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d}$ ja avoimina kuuluvat $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

2. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$, additiivinen todennäköisyys P on σ-additiivinen jos ja vain jos kaikille jonoille $(A_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$ jolla $A_n \downarrow \emptyset$, ali $A_n \supseteq A_{n+1}$ ja $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$, seuraa $P(A_n) \downarrow 0$.

   Tämä ei päde äärettömälle mitalle, esimerkiksi Lebesguen mitalle $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ avaruudessa. Keksi vastaesimerkki.

   Ratkaisu.

- Monotonisesta jatkuvuudesta $\Rightarrow$ σ-additiivisuus.
  Jono $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ erillisiä joukkoja. Yhdisteelle ($\Sigma, +$ erillisten joukkojen unioni)

$$A := \sum_k^\infty A_k = \sum_k^N A_k + \sum_{k=N+1}^\infty A_k \in \mathcal{F}.$$

  Jälkimmäinen termi oikella puolella on N:n mukana laskeva jono $\downarrow \emptyset$ ja oletuksen mukaan

$$\lim_{N\to\infty} P(\sum_{k=N+1}^\infty A_k) = 0,$$

  ja

$$\begin{aligned} P(A) &= \lim_{N\to\infty} P(\sum_k^N A_k) + P(\sum_{k=N+1}^\infty A_k) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_k^N P(A_k) = \sum_k^\infty P(A_k). \end{aligned}$$

  Tässä on mukana kaikki TN-mitan muut ominaisuudet: $0 \leq P(\cdot) \leq 1$, sekä additiivisuus.

- σ-additiivisuudesta$\Rightarrow$ monotoninen jatkuvuus.
  Olkoon jono $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ laskeva: $A_n \supseteq A_{n+1}$ ja $\lim_k \downarrow A_k = \bigcap_k A_k = \emptyset$. Lisäksi joukoille $(A_k \backslash A_{k+1}) \bigcap (A_l \backslash A_{l+1}) = \emptyset$, kun $k \neq l$.

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(\sum_{k=1}^\infty (A_k \backslash A_{k+1})) \\ &= P(\sum_{k=1}^{N-1} (A_k \backslash A_{k+1}) + \sum_{k=N}^\infty (A_k \backslash A_{k+1})) \\ &= P(\sum_{k=1}^{N-1} (A_k \backslash A_{k+1}) + A_N) \\ &= P(\sum_{k=1}^{N-1} (A_k \backslash A_{k+1})) + P(A_N). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \backslash A_{k+1}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N-1} P(A_k \backslash A_{k+1}) + \lim_{N\to\infty} P(A_N)$$

Mitan oltava rajoitettu: Kun $A_n = (n, \infty)$, $A_n \downarrow \emptyset$, mutta Lebesgue mitalle $\forall n\ \lambda(A_n) = +\infty$

3. Olkoon $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ binaari jonojen $\omega = (\omega_n : n \in \mathbb{N})$ avaruus.

   Määritellään sylinterin algebra $\mathcal{F}_n$, jossa $A \in \mathcal{F}_n$ jos ja vain jos a set $A_n \subseteq \{0,1\}^n$ such that

$$A = \{\omega : (\omega_1, \dots, \omega_n) \in A_n\}.$$

   joillekin $A_n \subseteq \{0,1\}^n$.

   - $\mathcal{F}_n$ on myös σ-algebra, selitä miksi.
   - Olkoon $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n\right)$, eli pienin σ-algebra joka sisältää kaikki sylinteri-σ-algebrat.
     Olkoon

$$\begin{aligned} L &= \{\omega : \exists \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \omega_i\} = \\ &= \{\omega : \limsup_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \omega_i = \liminf_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \omega_i\} \end{aligned}$$

     Osoita että $L \in \mathcal{F}_\infty$, mutta $L \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$.
     Vihje: Osoita että kun $q_1 < q_2 \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$,

$$\{\omega : \limsup_{n} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \in (q_1, q_2)\} \in \mathcal{F}_\infty \text{ ja}$$

$$\{\omega : \liminf_{n} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \in (q_1, q_2)\} \in \mathcal{F}_\infty$$

Ratkaisu.
$\mathcal{F}_n$ on $\sigma - algebra$.
Merkitään $\Omega = \{0,1\}^\infty$, $\Omega_n = \{0,1\}^n$. $A \in \mathcal{F}_n$, jos $A = B \times \{0,1\}^\infty$, missä $B \in 2^{\Omega_n}$.

- $\emptyset = \emptyset \times \{0,1\}^\infty \in \mathcal{F}_n$. $\Omega = \Omega_n \times \{0,1\}^\infty \mathcal{F}_n$.
- $A^c = (\Omega_n \backslash B) \times \{0,1\}^\infty$.
- Jonolle $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}_n$

$$\bigcap_n A_n = \bigcap_n (B_k \times \{0,1\}^\infty) = (\bigcap_n B_k) \times \{0,1\}^\infty \in \mathcal{F}_n.$$

Merkitsemällä $\overline{S}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \omega_i$ joukko L on se ω-joukko, jossa $\overline{S}_n$ suppenee. kijoittamalla vihjeen avulla

$$\begin{aligned}
&\{\omega : \limsup_n \overline{S}_n \in (q_1, q_2)\} = \\
&\{\omega : \limsup_n \overline{S}_n < q_2\} \backslash \{\omega : \limsup_n \overline{S}_n \leq q_1\}
\end{aligned} \tag{0.1}$$

Tapahtumalle $\{\omega : \overline{S}_k \leq q1\} \in \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_\infty$.

$$\{\omega : \sup_{k\geq n} \overline{S}_k \leq q1\} = \bigcap_{k\geq n} \{\omega : \overline{S}_k \leq q1\},$$

joka on kasvava jono ja limes siitä on

$$\lim_n \sup_{k\geq n} = \bigcup_n \bigcap_{k\geq n} \{\omega : \overline{S}_k \leq q1\} \in \mathcal{F}_\infty,$$

ja rivin (0.1) toinen tapahtuma on selvä. Ensimmäiselle on

$$\begin{aligned}
\{\omega : \limsup_n \overline{S}_n < q_2\} &= \bigcap_{r\in\mathbb{N}} \{\omega : \limsup_n \overline{S}_n \leq q_2 - r^{-1}\} \\
&= \bigcap_{r\in\mathbb{N}} \bigcup_n \bigcap_{k\geq n} \{\omega : \overline{S}_k \leq q2 - r^{-1}\} \in \mathcal{F}_\infty
\end{aligned}$$

Esimerkiksi tapahtuma $(\omega_1, \ldots, \omega_{n+1}) \times \{0,1\}^\infty = (1, \ldots, 1) \times \{0,1\}^\infty$ ei kuulu algebraan $\mathcal{F}_n \Rightarrow$ tapahtuma $(1, 1, \ldots)$ ei kuulu mihinkään $\mathcal{F}_n$.

4. Olkoon $F : \mathbb{R}^d \longrightarrow [0,1]$ jolla

   - $F(t_1, \ldots, t_d)$ ei-vähenevä jokaisen koordinaatin t_i:n suhteen.
   - $F(t_1, \ldots, t_d)$ on oikealta jatkuva jokaisen koordinaatin t_i:n suhteen.

- $\lim_{x\to-\infty} F(t_1,\dots,t_{i-1} \underbrace{,x,}_{i-\text{koordinaatti}} t_{i+1},\dots,t_n)=0,$
  $\forall 1\le i\le d,\ t_1,\dots t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_n.$
- $1=F(\infty,\infty,\dots,\infty) := \lim_{t_1\uparrow+\infty,\dots t_1\uparrow+\infty} F(t_1,t_2,\dots,t_d)$
- Osoita että on olemassa yksikäsitteinen todennäköisyysmitta $P : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\to[0,1]$ jolla

$$P\big((-\infty,t_1]\times\cdots\times(-\infty,t_d]\big)=F(t)\ \ \forall t=(t_1,\dots,t_d)\in\mathbb{R}^d.$$

Vihje: Dimensiossa $d=1$, väite on osoitettu luennolla Caratheodoryn lauseen avulla. Vie läpi täsmälleen sama todistus d-ulotteisessa tapauksessa.

Ratkaisu.

Seuraamme yksiulotteisen todistuksen:

Olkoon $\mathcal{A}_0=\mathcal{A}(\mathcal{I})$

$$\mathcal{I}=\Big\{(-\infty,t],t=(t_1,t_2,\dots,t_d)\in\mathbb{R}^2\Big\}$$

joukkojen virittämä algebra. Olemme osoittaneet että $\sigma(\mathcal{A}_0)=\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Koska $\mathcal{I}$ on π-luokka, yksikäsitteisyys seuraa lemmasta (1.2.1).

Joukolla $\emptyset\neq A\in\mathcal{A}_0$ on esitys

$$A=\bigcup_{k=1}^m (a_k,b_k]$$

jossa $m\in\mathbb{N}, a_k\in(\mathbb{R}\cup-\infty)^d\le b_k\in(\mathbb{R}\cup+\infty)^d$.

$\mathcal{A}_0$ on algebra joka virittää Borelin σ-algebran $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Tästä lähtien yksinkertäisuuden vuoksi oletan että $d=2$.

Määritellään kuvaus $P^{(0)}:\mathcal{A}_0\to[0,1]$

$$P^{(0)}(A)=\bigcup_{k=1}^m P^{(0)}(A_k)$$

silloin kun esityksen joukot ovat erillisiä , $(a_k,b_k]\cap(a_h,b_h]=\emptyset$ $h\neq k$, jossa

$$P^{(0)}(A_k)=F((b_{k,1},b_{k,2}))+F((a_{k,1},a_{k,2}))-F((a_{k,1},b_{k,2}))-F((b_{k,1},a_{k,2}))$$

$P^{(0)}(A)$ ei riipu A:n esityksestä, ja on additiivinen $\mathcal{A}_0$ algebrassa.

Kun osoitamme että $P^{(0)}$ on σ-additiivinen algebrassa $\mathcal{A}_0$, Caratheodoryn laajennuslauseesta seuraa että on olemassa laajennus P koko Borelin σ-algebralle.

Olkoon $A_n \in \mathcal{A}_0$ vähenevä jono, $A_n \supseteq A_{n+1}$ jolla $P^{(0)}(A_n) \geq 3\varepsilon \; \forall n$ jollekin $\varepsilon > 0$. Pitää osoittaa että

$$\bigcap_n A_n \neq \emptyset$$

Olkoon

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{m_n} (a_k^n, b_k^n]$$

jossa $-\infty < a_k^n \leq b_k^n \leq a_{k+1}^n \leq b_{k+1}^n < +\infty$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Oletuksesta (3) seuraa että on olemassa $z \in \mathbb{R}^+$ jolla

$$\varepsilon/3 < \max\{F((-z,+\infty)), F((+\infty,-z))\} \quad \text{ja} \quad (1 - F((z,z))) < \varepsilon/3$$

josta seuraa $P^{(0)}(((-z,-z),(z,z)]) =$

$$F((z,z)) + F((-z,-z)) - F((z,-z)) - F((-z,z)) \geq 1 - \varepsilon$$

Koska F on oikealta jatkuva, on olemassa $x_k^n \in (a_k^n, b_k^n] \subseteq \mathbb{R}^2$ jolla

$$P^{(0)}\big((x_k^n, b_k^n]\big) \leq P^{(0)}\big((a_k^n, b_k^n]\big) + \varepsilon 2^{-(k+n)}$$

Olkoon

$$B_n' = \left(\bigcup_{k=1}^{m_n} (x_k^n, b_k^n] \cap [-z,z]\right) \subseteq A_n, \quad B_n = \left(\bigcap_{l \leq n} B_l'\right) \subseteq A_n$$

jossa $B_n \in \mathcal{A}_0$. Seuraa

$$A_n \setminus B_n = \bigcup_{l \leq n} (A_n \setminus B_l') \subseteq \bigcup_{l \leq n} (A_l \setminus B_l')$$

Siis

$$\begin{aligned}
&P^{(0)}(A_n \setminus B_n) \\
&\leq P^{(0)}((-z,z]^c) + \sum_{l=1}^{n} P^{(0)}\big((A_l \setminus B_l') \cap (-z,z]\big) \\
&\leq P^{(0)}((-z,z]^c) + \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_l} P^{(0)}\big((a_k^l, x_k^l]\big) \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon \sum_{l=1}^{n} 2^{-l} \sum_{k=1}^{m_l} 2^{-k} \leq 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Tästä seuraa

$$P^{(0)}(B_n) = P^{(0)}(A_n) - P^{(0)}(A_n \setminus B_n) \geq (3-2)\varepsilon \quad \forall n$$

Olkoon $\bar{B}_n$ B_n sulkeuma. Jokaiselle n:lle $A_n \cap [(-z,-z),(z,z)] \supseteq \bar{B}_n \supseteq B_n \neq \emptyset$.
Tästä seuraa että

$$\bigcap_n A_n \supseteq \bigcap_n \bar{B}_n \neq \emptyset$$

muuten kokoelma $\{(\bar{B}_n)^c = [(-z,-z),(z,z)] \setminus B_n : n \in \mathbb{N}\}$ olisi kompakti joukon $[(-z,-z),(z,z)]$ avoin peite ilman äärellistä alipeiteetta.

5. Olkoon $\big(K(i \to j)\big)_{i,j\in\mathbb{N}}$ ääretön-ulotteinen siirtymä-matriisi, jossa $K(i \to j) \in [0,1]$, ja $\sum_{j\in\mathbb{N}} K(i \to j) = 1 \; \forall i \in \mathbb{N}$.

   Tulkinta: jokaiselle $i \in \mathbb{N}$, $K(i \to \cdot)$ on todennäköisyy diskreetti-avaruudessa $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$. Olkoon myös $\pi : \mathbb{N} \to [0,1]$ todennäköisyys jolla

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \pi(i) = 1.$$

   - Osoita että vektori matriisi tulo

$$(\pi K)(i) = \sum_{\ell} \pi(\ell) K(\ell \to i) \quad \ell \in \mathbb{N}$$

     on todennäköysyys.
     Merkitään myös matriisin potenssi

$$K^0(i \to j) = \delta_{ij}, \quad K^1(i \to j) = K(i \to j), \; K^2(i \to j) = \sum_{\ell\in\mathbb{N}} K(i \to \ell) K(\ell \to j),$$

$$K^n(i \to j) = \sum_{\ell\in\mathbb{N}} K(i \to \ell) K^{n-1}(j \to \ell) =$$

$$\sum_{\ell_1,\dots,\ell_{n-1}\in\mathbb{N}} K(i \to \ell_1) K(\ell_1 \to \ell_2) \dots K(\ell_{n-2}, \ell_{n-1}) K(\ell_{n-1}, j)$$

     Osoita että $K^n(i \to \cdot)$ on todennäköisyys.
     Olkoon myös $\pi : \mathbb{N} \to [0,1]$ todennäköisyys jolla

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \pi(i) = 1.$$

Merkitään matriisi-tulo

$$(\pi K^n)(i) = \sum_{\ell} \pi(\ell) K^n(\ell \to i) \quad ß \in \mathbb{N}$$

Osoita että $\pi K^n(\cdot)$ on todennäköisyys.

Konstruoimme Kolmogorovin laajennuksen avulla todennäköisyysmitta avaruudessa $\mathbb{N}^{[0,+\infty)}$ jossa $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ on aikaparametri. Olkoon

$$Q_t(i \to j) = \exp(-t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} K^n(i \to j)$$

- Osoita että kaikille $i \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}_+$, $Q_t(i \to \cdot)$ on todennäköisyys.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ell_0, i_1 \dots, i_n \in \mathbb{N}, 0 \le t_1 \le \dots \le t_n \in \mathbb{R}^+$, merkitään

  $$P_{t_1,\dots,t_n}(i_1,\dots,i_n) = \sum_{\ell} \pi(\ell) Q_{t_1}(\ell \to i_1) Q_{t_2-t_1}(i_1 \to i_2) \dots Q_{t_n - t_{n-1}}(i_{n-1} \to i_n)$$

  ja kun $t_1,\dots,t_n$ eivät ole järjestyksessä, yksinkertäisesti otetaan

  $$P_{t_1,\dots,t_n}(i_1,\dots,i_n) = P_{\sigma(t_1),\dots,\sigma(t_n)}(\sigma(i_1),\dots \sigma(i_n))$$

  jossa $\sigma : \{1,\dots,n\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}$ on järjestävä permutaatio jolla $\sigma(t_1) \le \sigma(t_2) \le \dots \le \sigma(t_n)$.
- Osoita että äärellisten ulotteisten jakaumien perhe

  $$\left\{ P_{t_1,\dots,t_n} : n \in \mathbb{N}, t_1,\dots,t_n \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

  toteuttaa Kolmogorovin laajennus lauseen oletusta ja on olemassa todennäköysyysmitta $\mathbb{P}$ todennäköisyysavaruudessa $\Omega = \mathbb{N}^{\mathbb{R}_+}$ joka koostu kuvauksista $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{N}$, varustettuna cylinterien virittämällä σ-algebralla $\sigma(\mathcal{C})$, jolla

  $$\mathbb{P}\big(\{\omega : \omega(t_1) = i_1,\dots,\omega(t_n) = i_n\}\big) = P_{t_1,\dots,t_n}\big(i_1,\dots,i_n\big)$$

Ratkaisu.

Tässä on kyse Markovin ketjun jakaumasta, jatkuvassa ajassa diskreetti tila-avaruudessa $\mathbb{N}$.

- $(\pi K)(i) = \sum_{\ell} \pi(\ell) K(\ell \to i)$ on todennäköisyys:

- Koska $0 \leq \pi(\ell) \leq 1$ ja $0 \leq K(\ell \to i) \leq 1$, on

$$0 \leq (\pi K)(i) = \sum_{\ell} \pi(\ell) K(\ell \to i) \leq \sum_{\ell} \pi(\ell) = 1$$

- Koska kaikki on positiivista, voidaan sarjalle vaihtaa summausjärjestystä ja

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} (\pi K)(i) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\ell} \pi(\ell) K(\ell \to i) \\ &= \sum_{\ell} \sum_{i=1}^{\infty} \pi(\ell) K(\ell \to i) \\ &= \sum_{\ell} \pi(\ell) \sum_{i=1}^{\infty} K(\ell \to i) = 1 \end{aligned}$$

- Additiivisuus. $A, B \in 2^{\mathbb{N}}$, $A \cap B = \emptyset$

$$(\pi K)(i)(A \cup B) = \sum_{i \in A \cup B} (\pi K)(i) = \sum_{i \in A} (\pi K)(i) + \sum_{i \in B} (\pi K)(i).$$

- Jos $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \downarrow \emptyset$, on selvää, että $P(A_n) \downarrow 0$. (πK) on σ-additiivinen.

• $K^n(i \to \cdot)$ on todennäköisyys. Tapaukset K^0 ja K^1 selviä. Muut TN-mitan ominaisuudet menee samoin kuin edellä; että $K^n(i \to \Omega) = 1$ on hyvä tarkistaa.

$$K^2(i \to j) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} K(i \to \ell) K(\ell \to j) \tag{0.2}$$

ja

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} K^2(i \to j) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} K(i \to \ell) K(\ell \to j) \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} K(i \to \ell) \sum_{j=1}^{\infty} K(\ell \to j) = 1. \end{aligned}$$

Induktioaskel on täsmälleen samanlainen, ja voidaan uskoa, että tämä on voimassa kaikilla potensseilla. Tarkistetaan vielä, että

K:n potenssi voidaan kirjoittaa annetussa muodossa. Toinen potenssi on suora matriisitulo yhtälöstä (0.2). Kolmas on

$$\begin{aligned}
K^3(i \to j) &= \sum_{\ell \in \mathbb{N}} K^2(i \to \ell) K(\ell \to j) \\
&= \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \left(\sum_m K(i \to m) K(m \to \ell) \right) K(\ell \to j) \\
&= \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \sum_m K(i \to m) K(m \to \ell) K(\ell \to j).
\end{aligned}$$

Jälleen induktioaskel on samanlainen.

- Koska $K^n(i \to \cdot)$ on todennäköisyys, niin $(\pi K^n)(i)$ on todennököisyys samoin kuin edellä.
- $Q_t(i \to \cdot)$ on todennäköisyys. Ensiksi, jokaisella $t < \infty$ (Taylorin) sarja $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ suppenee itseisesti. Josta seuraa, että $Q_t(i \to \cdot)$ suppenee itseisesti ja $0 \leq Q_t(i \to \cdot) \leq e^{-t} e^t = 1$. Vaihtamalla summausjärjestystä on

$$\begin{aligned}
Q_t(i \to \Omega) &= \sum_{j=1}^{\infty} Q_t(i \to j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} K^n(i \to j) \\
&= e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{j=1}^{\infty} K^n(i \to j) = 1.
\end{aligned}$$

Additiivisyys seuraa $K^n(i \to j)$ additiivisyydestä ja vaihtamalla summausjärjestystä. Esimerkiksi $(j \neq k)$

$$\begin{aligned}
Q_t(i \to \{j,k\}) &= e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} K^n(i \to \{j,k\}) \\
&= e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (K^n(i \to j) + K^n(i \to k)) \\
&= e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} K^n(i \to j) + e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} K^n(i \to k) \\
&= Q_t(i \to j) + Q_t(i \to k).
\end{aligned}$$

Jos $A_n \downarrow \emptyset$, niin $K^n(i \to A_n) \downarrow 0$, josta sama ominaisuus Q_t:lle. Q_t on σadditiivinen.

- $P_{t_1,\ldots,t_n}\big(i_1,\ldots,i_n\big)$ on todennäköisyys.
  - $(\pi Q_t)(i)$ on todennäköisyys:

$$\begin{aligned}(\pi Q_t)(i) &= \sum_\ell \pi(\ell) Q_t(\ell \to i)\\ &= \sum_\ell \pi(\ell) e^{-t} \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!} K^n(\ell \to i)\\ &= e^{-t} \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!} \sum_\ell \pi(\ell) K^n(\ell \to i)\\ &= e^{-t} \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!} (\pi K^n)(i).\end{aligned}$$

    Koska $(\pi K^n)(i)$ on TN ja summausjärjestystä voidaan vaihtaa, on $(\pi Q_t)(i)$ additiivinen. $\Rightarrow P_{t_1}\big(i\big)$ on TN. Kirjoittamalla

$$\begin{aligned}P_{t_1,t_2}(i_1,i_2) &= P_{t_1}(i_1) Q_{t_2-t_1}(i_1 \to i_2)\\ P_{t_1,t_2,t_3}(i_1,i_2,i_3) &= P_{t_1,t_2}(i_1,i_2) Q_{t_3-t_2}(i_2 \to i_3)\end{aligned}$$

    ja niin edelleen, nähdään, induktiolla että $P_{t_1,\ldots,t_n}(\cdot)$ on additiivinen. Muut TN-mitan ominaisuudet menee kuten edellä.

- $P_{t_1,\ldots,t_n}\big(i_1,\ldots,i_n\big)$ konsistentit. Tarkastellaan yksinkertaisuuden vuoksi kolmea ajankohtaa $t_1 \le t_2 \le t_3$. Pitää osoittaa, että

$$\begin{aligned}P_{t_1,t_2,t_3}(i_1,i_2,\mathbb{N}) &= P_{t_1,t_2}(i_1,i_2)\\ P_{t_1,t_2,t_3}(i_1,\mathbb{N},i_3) &= P_{t_1,t_3}(i_1,i_3) \qquad (0.3)\\ P_{t_1,t_2,t_3}(\mathbb{N},i_2,i_3) &= P_{t_2,t_3}(i_2,i_3). \qquad (0.4)\end{aligned}$$

Ensimmäinen on suora integrointi:

$$\begin{aligned}P_{t_1,t_2,t_3}(i_1,i_2,\mathbb{N}) &= \sum_{k=1}^\infty \sum_\ell \pi(\ell) Q_{t1}(\ell \to i_1) Q_{t_2-t1}(i_1 \to i_2) Q_{t_3-t_2}(i_2 \to k)\\ &= \sum_\ell \pi(\ell) Q_{t1}(\ell \to i_1) Q_{t_2-t1}(i_1 \to i_2) \sum_{k=1}^\infty Q_{t_3-t_2}(i_2 \to k)\\ &= \sum_\ell \pi(\ell) Q_{t1}(\ell \to i_1) Q_{t_2-t1}(i_1 \to i_2)\\ &= P_{t_1,t_2}(i_1,i_2).\end{aligned}$$

Lasketaan (0.3). Merkitään prosessia hetken aikaa X_t:llä ja on Markov:

$$P(X_{t_n} = i | X_{t_{n-1}} = j, X_{t_{n-2}} = k, \ldots) = P(X_{t_n} = i | X_{t_{n-1}} = j) := Q_{t_n - t_{n-1}}(j \to i)$$

eli ainoastaan viimeinen havainto on merkitsevä ja Q on ehdollinen siirtymätodennäköisyys. X_0 noudattaa jakaumaa π.
Yhtälöstä (0.3) $P_{t_1,t_2,t_3}(i_1, \mathbb{N}, i_3)$ kirjoitettuna auki on:

$$\begin{aligned} P_{t_1,t_2,t_3}(i_1, \mathbb{N}, i_3) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell} \pi(\ell) Q_{t1}(\ell \to i_1) Q_{t_2-t_1}(i_1 \to k) Q_{t_3-t_2}(k \to i_3) \\ &= \sum_{\ell} \pi(\ell) Q_{t1}(\ell \to i_1) \sum_{k=1}^{\infty} Q_{t_2-t_1}(i_1 \to k) Q_{t_3-t_2}(k \to i_3) \end{aligned}$$

ja pitää laskea summalauseke

$$\sum_{k=1}^{\infty} Q_{t_2-t_1}(i_1 \to k) Q_{t_3-t_2}(k \to i_3). \tag{0.5}$$

Sitä varten kirjoitetaan

$$\begin{aligned} Q_{t_3-t_1}(i_1 \to i_3) &= P(X_{t_3} = i_3 | X_{t_1} = i_1) \\ &= \sum_k P(X_{t_3} = i_3, X_{t_2} = k | X_{t_1} = i_1) \\ &= \sum_k P(X_{t_3} = i_3 | X_{t_2} = k, X_{t_1} = i_1) P(X_{t_2} = k | X_{t_1} = i_1)) \\ &= \sum_k P(X_{t_3} = i_3 | X_{t_2} = k) P(X_{t_2} = k | X_{t_1} = i_1)), \end{aligned}$$

missä Markov ominaisuutta on käytetty viimeisessä vaiheessa[1]. Viimeinen rivi on yhtälö (0.5) ja

$$\begin{aligned} P_{t_1,t_2,t_3}(i_1, \mathbb{N}, i_3) &= \sum_{\ell} \pi(\ell) Q_{t1}(\ell \to i_1) Q_{t_3-t_1}(i_1 \to i_3) \\ &= P_{t_1,t_3}(i_1, i_3). \end{aligned}$$

Yhtälö (0.4) menee samalla tavalla.
Koska reunajakaumat ovat konsistentit voidaan soveltaa laajennuslausetta ja saadan mitta P avaruudelle $(\mathbb{N}^{\mathbb{R}_+}, \sigma(\mathcal{C}))$, jolle rajoittuma $P|\mathcal{C}$ on annetut reunajakaumat $P_{t_1,\ldots,t_n}$.

6. Olkoon $\Omega = \mathbb{R}^{[0,1]}$ joka koostuu kuvauksista $\omega : [0,1] \to \mathbb{R}$.

[1] Chapman-Kolmogorov yhtälö

- Osoita että joukko

$$C([0,1]) = \left\{ \omega : \ t \mapsto \omega(t) \text{ on jatkuva kuvaus } \right\}$$

ei kuulu cylinterien virittämään σ-algebraan $\sigma(\mathcal{C})$.
Vihje: Osoita ensin että kun $\{ t_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq [0,1]$ on Cauchy jono, tapahtuma

$$C(\{ t_n\}) = \{ \omega \in \Omega : \ \{ \omega(t_n)\} \text{ on Cauchy jono } \Big\} \in \sigma(\mathcal{C}).$$

- Olkoon

$$B_\infty(0,\varepsilon) = \left\{ \omega \in \Omega : \ \sup_{t\in[0,1]} |\omega(t)| \le \varepsilon \right\}$$

Osoita että $B_\infty(0,\varepsilon)$ ei kuulu σ-algebraan $\sigma(\mathcal{C})$.
Vihje: Osoita ensin että

$$\left\{ \omega \in \Omega : \ \sup_{q\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} |\omega(q)| \le \varepsilon \right\} \in \sigma(\mathcal{C})$$

Ratkaisut

Olkoon $\Omega = \mathbb{R}^T$, jossa $T = [0,1]$ varustettuna cylintereiden virittämän σ-algebralla, $\sigma(\mathcal{C}^T)$. Tässä $\mathcal{C}^T$ on sylintereiden algebra, jossa $C \in \mathcal{C}^T$ on muotoa

$$C = \left\{\omega \in \Omega : (\omega_{t_1}, \dots, \omega_{t_n}) \in B \right\}, \qquad \text{jollekin } n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in T = [0,1], \ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

Osoitan että $A \in \sigma(\mathcal{C}^T)$ jos ja vain jos on olemassa numeroituva indeksien alijoukko $S \subseteq T$ jolla $A \in \sigma(\mathcal{C}^S)$, jossa $C \in \mathcal{C}^S$ jos ja vain jos

$$C = \left\{\omega \in \Omega : (\omega_{t_1}, \dots, \omega_{t_n}) \in B \right\}, \qquad \text{jollekin jollekin } n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in S \ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

Selvästi kun $S \subseteq T$, $\mathcal{C}^S \subseteq \mathcal{C}^T$ ja siksi $\sigma(\mathcal{C}^S) \subseteq \sigma(\mathcal{C}^T)$

Olkoon

$$\mathcal{D}^T = \bigcup_{S\subseteq T:\ |S|\le|\mathbb{N}|} \sigma(\mathcal{C}^S)$$

jossa otetaan yhdiste yli numeroituvien $S \subseteq T$. Selvästi

$$\sigma(\mathcal{C}^T) \supseteq \mathcal{D}^T \supseteq \mathcal{C}^T .$$

Kun osoitamme että $\mathcal{D}^T$ on σ-algebra, seuraa että $\mathcal{D}^T = \sigma(\mathcal{C}^T)$, eli jokainen joukko $A \in \sigma(\mathcal{C}^T)$, kuuluu $\sigma(\mathcal{C}^S)$ σ-algebralle jollakin numeroituvalla $S \subseteq T$.

Huomataan ensin että jos joukot $S_n \subseteq T$ on numeroituva $\forall n$, numeroituvien joukkojen yhdiste $\bigcup_n S_n$ on numeroituva. Tämä seuraa Cantorin numeroinnin-argumentista. Numeroidaan ensin S_n jäseneitä:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{s_{1,1}, s_{1,2}, s_{1,3}, \dots, \} \\ S_2 &= \{s_{2,1}, s_{2,2}, s_{2,3}, \dots, \} \\ &\dots \end{aligned}$$

Numeroituvan yhdisteen jäseniä voidaan sitten numeroida seuraavasti:

$$S := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n = \{s_{1,1}, s_{2,1}, s_{1,2}, s_{1,3}, s_{2,2}, s_{1,3}, \dots\} .$$

Selvästi $\Omega \in \mathcal{C}^{\emptyset} \subseteq \mathcal{D}^T$.

Jos $A_i \in \sigma(\mathcal{C}^{S_i})$ kun $i \in \mathbb{N}$, jossa indeksijoukot $S_i \subseteq T$ ovat numeroituvia, seuraa $A_i^c \in \sigma(\mathcal{C}^{S_i})$, ja $(A_i \cap A_j)$, $(A_i \cup A_j) \in \sigma(\mathcal{C}^{S_i \cup S_j})$ jossa $S_i \cup S_j$ on numeroituva.

Tämä pätee myös numeroituvalle yhdisteelle, koska

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \sigma(\mathcal{C}^S)$$

jossa $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$ on myös numeroituva.

Siksi jatkuvien funktioiden joukko $C([0,1];\mathbb{R})$ ei kuulu cylinterien virittämään σ-algebraan $\sigma(\mathcal{C}^{[0,1]})$, muuten se kuuluisi $\sigma(\mathcal{C}^S)$, jollekin numeroituvalle $S \subseteq [0,1]$, mutta näin ei voi olla. Vaikka funktio olisi jatkuva kuinka isossa numeroituvassa alijoukossa $S \subseteq [0,1]$, ei voi tehdä johtöpäätöstä että fuinktio olisi jatkuva kaikkialla.

Samasta syystä myös $B_\infty(0,\varepsilon) \notin \sigma(\mathcal{C}^{[0,1]})$