

HY Todennäköisyysteoria, syksy 2013, laskuharjoitukset 2 (18.9.2013)

1. Todennäköisyysvaruudessa (Ω, \mathcal{F}, P) , määritellään mielivaltaisen joukon $G \subseteq \Omega$ ulkomitta

$$P^*(G) = \inf_{\{F_n\}} \sum_{n=1}^{\infty} P(F_n)$$

jossa infimum otetaan yli kaikkien numeroituvien mitallisten peitteiden $\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$ jolla $G \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Caratheodoryn laajennuslauseen todistuksessa osoitettiin että P^* on ulkomitta, siis on numeroituvasti sub- σ -additiivinen, kasvava, ja $P^*(\emptyset) = 0$.

Määriteltiin myös σ -algebra \mathcal{L} joka koostuu kaikista joukoista $A \subseteq \Omega$ jotka *jakaavat siististi* ulkomitan P^* seuraavalla tavalla

$$P^*(G) = P^*(G \cap A) + P^*(G \cap A^c) \quad \forall G \subseteq \Omega$$

\mathcal{L} jäsenet kutsutaan myös P^* -mitallisiksi. Olemme myös osoittaneet että $P^* : \mathcal{L} \mapsto [0, 1]$ on σ -additiivinen todennäköisyysmitta.

Määritellään nyt joukkoperheet

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^P &= \{A \subseteq \Omega : \exists B', B'' \in \mathcal{F} \text{ with } B' \supseteq A \supseteq B'' \text{ and } P(B' \setminus B'') = 0\}, \\ \mathcal{N}^P &= \{A \subseteq \Omega : \exists B \in \mathcal{F} \text{ with } B \supseteq A \text{ and } P(B) = 0\} \quad (\text{P-nolla joukot}) \end{aligned}$$

- (a) Osoita että jokaiselle joukolle $G \subseteq \Omega$, on olemassa joukko $F \in \mathcal{F}$ jolla $F \supseteq G$ ja $P(F) = P^*(G)$.

Ratkaisu.

Olkoon mitallinen peite $\{F_k^n\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ jolla

$$\bigcup_k F_k^n \supseteq G.$$

Ulkomitan P^* määritelmästä seuraa, että $\forall n$ on olemassa peite $\{F_k^n\}$, jolle

$$P^*(G) \leq P^*\left(\bigcup_k F_k^n\right) = P\left(\bigcup_k F_k^n\right) \leq P^*(G) + \frac{1}{n}$$

Olkoon

$$A^n = \bigcap_{l \leq n} \left(\bigcup_k F_k^l \right) \in \mathcal{F}.$$

Selvästi $A^n \supseteq A^{n+1} \supseteq G$, ja

$$\bigcup_k F_k^n \supseteq A^n.$$

Asetetaan $A := \lim \downarrow A^n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A^n \in \mathcal{F}$.

Seuraa P^* määritelmästä, että

$$P^*(G) \leq P^*(A^n) = P(A^n) \leq P\left(\bigcup_k F_k^n\right) \leq P^*(G) + \frac{1}{n}$$

Koska P on σ -additiivinen (monotonisesti jatkuva),

$$P(A) = \lim \downarrow P(A^n) = P^*(G) \quad \square$$

- (b) Osoita että jokaiselle joukolle $G \in \mathcal{L}$, on olemassa joukko $E \in \mathcal{F}$ jolla $E \subseteq G$ and $P(E) = P^*(G)$.

Vihje: soveltakaa tehtävän a) tulosta joukolle G^c ja käytä oletusta $G \in \mathcal{L}$.

Ratkaisu.

Koska $G \in \mathcal{L}$,

$$1 = P^*(\Omega) = P^*(G) + P^*(G^c)$$

Edellisestä tehtävästä seuraa että $\exists A \in \mathcal{F}$ jolla $A \subseteq G$, $A^c \subseteq G^c$,

$$1 - P^*(G) = P^*(G^c) = P(A^c) = 1 - P(A) \quad \square$$

- (c) Osoita että $\mathcal{F}^P = \sigma(\mathcal{F}, \mathcal{N}^P)$. Tämä on σ -algebran \mathcal{F} P -täydennys P -nolla mittaisilla joukoilla.

Ratkaisu.

Pitää osoittaa, että

- \mathcal{F}^P on σ -algebra.

- $\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{N}^P) \subseteq \mathcal{F}^P$.
Koska $\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{N}^P)$ on pienin σ -algebra, joka sisältää virittäjäjoukkonsa, niin inklusion osoittamiseksi riittää osoittaa, että virittäjäjoukot $\mathcal{F}, \mathcal{N}^P \subset \mathcal{F}^P$.
 - Jos $A \in \mathcal{F}$, niin valinnoilla $B' = B'' = A$ on $P(B' \setminus B'') = 0$ ja $A \in \mathcal{F}^P$.
 - Jos $A \in \mathcal{N}^P$, niin $\exists B \in \mathcal{F}$, jolle $B \supseteq A$ ja $P(B) = 0$. Valitsemalla $B' = B$ ja $B'' = \emptyset$ on $P(B' \setminus B'') = 0$.
- $\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{N}^P) \supseteq \mathcal{F}^P$.
Jos $A \in \mathcal{F}^P$, niin $\exists B', B'' \in \mathcal{F}$, joille $B' \supseteq A \supseteq B''$. Tällöin $A = (A \setminus B'') \cup B''$. $A \setminus B'' \subseteq B' \setminus B''$, joten $A \setminus B'' \in \mathcal{N}^P$. Josta seuraa, että $A \in \sigma(\mathcal{F}, \mathcal{N}^P)$

\mathcal{F}^P on σ -algebra:

- Selvästi $\Omega \in \mathcal{F}^P$.
- Jos $B' \supseteq A \supseteq B''$, jossa $(B' \setminus B'') \in \mathcal{N}^P$, $(B'')^c \supseteq A^c \supseteq (B')^c$, jossa $(B'')^c \setminus (B')^c = (B'')^c \cap B' = (B' \setminus B'') \in \mathcal{N}^P$.
- Jos $A_k = B_k \cup N_k$ jossa $B_k \in \mathcal{F}$ ja $N_k \subseteq C_k \in \mathcal{F}$ jolla $P(C_k) = 0$, seuraa että $A = \bigcup_k (B_k \cup N_k) = \left(\bigcup_k B_k \right) \cup \left(\bigcup_k N_k \right) = B \cup N$ jossa $B \in \mathcal{F}$

$$N = \left(\bigcup_k N_k \right) \subseteq \left(\bigcup_k C_k \right) \text{ ja } P\left(\bigcup_k C_k \right) \leq \sum_k P(C_k) = 0 \quad \square$$

- (d) Osoita että $\mathcal{F}^P = \mathcal{L}$. Vihjeet: Osoittakseen että $\mathcal{N}^P \subseteq \mathcal{L}$, muista että ulkomitta P^* on kasvava ja subadditiivinen. Osoittakseen että $\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{N}^P) \supseteq \mathcal{L}$, käytä tehtäviä a), b).

Ratkaisu.

- $\mathcal{F}^P = \sigma(\mathcal{F}, \mathcal{N}^P) \subseteq \mathcal{L}$.
Osoitetaan, että virittäjäjoukot kuuluvat luokkaan \mathcal{L} .
 - $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}$.
Testijoukolle $G \subseteq \Omega$ on a)-kohdan nojalla olemassa $F \in \mathcal{F}$ siten, että $F \supseteq G$ ja $P^*(G) = P(F)$. Jos $A \in \mathcal{F}$, niin

$$\begin{aligned} P^*(G) &\leq P^*(G \cap A) + P^*(G \cap A^c) \\ &\leq P^*(F \cap A) + P^*(F \cap A^c) \\ &= P(F \cap A) + P(F \cap A^c) \\ &= P(F) = P^*(G). \end{aligned}$$

– $\mathcal{N}^P \subseteq \mathcal{L}$.

Olkoon $N \in \mathcal{N}^P$, $G \subseteq \Omega$.

$$\begin{aligned} P^*(G) &\leq P^*(G \cap N) + P^*(G \cap N^c) \\ &\leq P^*(N) + P^*(G \cap N^c) = 0 + P^*(G \cap N^c) \leq P^*(G) \end{aligned}$$

ja $N \in \mathcal{L}$.

• $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}^P$.

Olkoon $L \in \mathcal{L}$.

a)-kohta $\Rightarrow \exists B' \in \mathcal{F}$ s.e. $B' \supseteq L$ ja $P^*(L) = P(B')$.

b)-kohta $\Rightarrow \exists B'' \in \mathcal{F}$ s.e. $B'' \subseteq L$ ja $P^*(L) = P(B'')$.

Nyt $P(B' \setminus B'') = P(B') - P(B'') = 0$.

2. Olkoon P todennäköisyysmitta avaruudessa ($\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$), ja $F(t) := P((-\infty, t])$, joka kutsutaan todennäköisyysmitan kertymäfunktiksi. Osoita:

(a) F on kasvava

R. Koska $(-\infty, s] \subseteq (-\infty, t]$ kun $s \leq t$, seuraa $F(s) \leq F(t)$.

(b) F on oikealta jatkuva. Vihje: Käytä todennäköisyyden σ -additiivisuutta.

R. Kun $n \uparrow \infty$,

$$(-\infty, t + n^{-1}] \downarrow (-\infty, t] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, t + n^{-1}]$$

Koska P on σ -additiivinen seuraa että $F(t + n^{-1}) \downarrow F(t)$.

(c)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

R. Kun $n \uparrow \infty$,

$$(-\infty, -n] \downarrow \emptyset \text{ ja } (-\infty, n] \uparrow \mathbb{R}$$

Koska P on σ -additiivinen

$$F(-n) \downarrow P(\emptyset) = 0 \text{ ja } F(n) \uparrow P(\mathbb{R}) = 1$$

(d) Etsi esimerkki jossa F ei ole jatkuva.

Vihje: määritellään pistemassa $\delta_x(A) := \mathbf{1}(x \in A)$ jossa $x \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Osoita että $\delta_x(\cdot)$ on todennäköisyys. Mikä on sen kertymäfunktio?

Ratkaisu.

TN-mitan määritelmä ($A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$):

- $\delta_x(A) \geq 0$.
- $\delta_x(\Omega) = 1$.
- Jos $A \cap B = \emptyset$, niin

$$\delta_x(A \cup B) = \mathbf{1}(x \in A) + \mathbf{1}(x \in B)$$

- σ -additiivisuus yhtäpitävää sen kanssa, että

$$A_n \downarrow \emptyset \Rightarrow P(A_n) \downarrow 0.$$

$$\delta_x((-\infty, -n]) = 0, \text{ kun } -n < x.$$

Kun todennäköisyysmitalla P on atoomi (tai pistemassa) $\{x\}$, eli $P(\{x\}) > 0$ jollekin $x \in \mathbb{R}$, koska P on additiivinen seuraa

$$P((-\infty, x]) = P((-\infty, x)) + P(\{x\}) \text{ eli } F(x) - F(x-) = \Delta F(x) = P(\{x\}) > 0$$

3. Määritelmän mukaan avaruuden $\Omega = \mathbb{R}^d$ Borelin σ algebra on avomien joukkojen virittämä σ -algebra.

Kun $t \in \mathbb{R}^d$, olkoon

$$(-\infty, t] = \{s \in \mathbb{R}^d : s_i \leq t_i, i = 1, \dots, d\}$$

Osoita että luokka

$$\mathcal{I} = \{(-\infty, q], q \in \mathbb{Q}^d\}$$

on π -luokka joka virittää Borelin σ -algebran.

Vihje Jos U on avoin \mathbb{R}^d :ssa, ja Q on tiheä \mathbb{R} :ssa, $\forall x \in U \exists r, q \in \mathbb{Q}^d$ jolla $r < q$ (eli $r_i < q_i$ kun $i = 1, \dots, d$)

$$x \in (r, q) := (r_1, q_1) \times (r_2, q_2) \times \dots \times (r_d, q_d) \subseteq U.$$

R. Selvästi $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \supseteq \sigma(\mathcal{I})$, koska $(-\infty, q] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Kun $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{Q}^d$, $(-\infty, \mathbf{q}] \cap (-\infty, \mathbf{r}] = (-\infty, \mathbf{r} \wedge \mathbf{q}]$ jossa $\mathbf{r} \wedge \mathbf{q} \in \mathbb{Q}^d$,

$(\mathbf{r} \wedge \mathbf{q})_i = \min(r_i, q_i)$, $i = 1, \dots, d$, eli \mathcal{I} on π -luokka.

Huomaamme että

$$(-\infty, \mathbf{q}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, \mathbf{q} - n^{-1} \mathbf{1}] \in \sigma(\mathcal{I})$$

jossa $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{Q}^d$.

Olkoon

$$L(r, q) := \{s \in \mathbb{R}^d : r < s \leq q\} \in \sigma(\mathcal{I})$$

laatikko kulmapisteilla $r \leq q \in \mathbb{Q}^d$, (eli $r_i \leq q_i$ kun $i = 1, \dots, d$).

Esimerkiksi kun $d = 2$, laatikon indikaattori funktiolla on esitys

$$\begin{aligned} \mathbf{1}\{t \in L((r_1, r_1), (q_1, q_2))\} &= \mathbf{1}\{t \in (-\infty, (q_1, q_2))\} + \mathbf{1}\{t \in (-\infty, (r_1, r_2))\} \\ &\quad - \mathbf{1}\{t \in (-\infty, (r_1, q_2))\} - \mathbf{1}\{t \in (-\infty, (q_1, r_2))\} \end{aligned}$$

joka yleistyy korkeammalle dimensioille.

Laatikon sisältö

$$L^\circ(r, q) = (L(r, q) \setminus \partial L(r, q)) \in \sigma(\mathcal{I})$$

on avoin laatikko samoilla kulmapisteillä.

Olkoon $U \subseteq \mathbb{R}^d$ avoin joukko. Koska U on avoin, kaikille $x \in U$ on olemassa avoin laatikko $L^\circ(r(x), q(x))$ jolla $x \in L^\circ(r(x), q(x)) \subseteq U$ kulmapisteillä $r(x) \leq q(x) \in \mathbb{Q}^d$. Tästä seuraa että

$$U = \bigcup_{x \in U} L^\circ(r(x), q(x)) \in \sigma(\mathcal{I})$$

koska yhdiste on numeroituva (vaikka avoin joukko U on ei-numeroituva): rationaalisten kulmapisteiden määrä on korkeintaan numeroituva.

Koska määritelmän mukaan avoimet joukot virittävät Borelin σ -algebran, myös $\sigma(\mathcal{I}) \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

\mathbb{R}^2 : Avoimet laatikot $\in \sigma(\mathcal{I})$. Jokaiselle pisteelle $x \in \mathbb{R}^2$ on olemassa $j, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ s.e. $x \in A(j, k, n) := (\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}) \times (\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$.

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{j, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}} A(j, k, n),$$

numeroituva yhdiste. Jokaiselle $x \in U \subset \mathbb{R}^2$ avoin on olemassa $A(j, k, n)$ s.e. $x \in A(j, k, n) \subset U$. Kaikkien tällaisten joukkojen (numeroituva) yhdiste on U .